$\mathbb{K}$ ist ein angeordneter Körper.

Auf $\mathbb{R}$ gibt es eine Ordnungrelation: $\leq$

Ordnungsaxiome

O1) Reflexivität: $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x \leq x$

O2) Transitivität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

O3) Antisymmetrie: $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

O4) Total: $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y$ oder $y \leq x$

Die Ordnung ist konsistent mit Addition und Multiplikation

K1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

K2) $\forall x \in \mathbb{R}^{+}$ (i.e $x \geq 0$) und $\forall y \geq 0: x \cdot y \geq 0$.

Satz $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper, der Ordnungvollständig ist

Ordnungvollständigkeit unterscheidet $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$.

Ordnungsvollständigkeit.

Seien A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$, so dass (vi) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

(vii) $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ gilt:

$$a \leq b$$

(d.h. alle Elemente von A links von allen Elementen von B sind)

Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ so dass für alle $a \in A$, für alle $b \in B$ die Ungleichung $a \leq c \leq b$ gilt.

Bmk.: Die Existenz der Zahl c ist gewissermassen eine Versicherung, dass $\mathbb{R}$ keine "Lücken" hat.

Satz Für jedes $t \geq 0$ hat die Gleichung $x^2 = t$ eine Lösung in $\mathbb{R}$.

Bmk.: Für $t \geq 0$ gibt es genau eine Lösung von $x^2 = t$ mit $x \geq 0$. Sie wird mit $\sqrt{t}$ bezeichnet

Archimedisches Prinzip:

1) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y < nx$

2) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n+1$.

Supremum, Infimum
Maximum, Minimum.

Defn 1.1.2 Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

(i) $c \in \mathbb{R}$ ist eine obere Schranke von A falls $\forall a \in A: a \leq c$

Die Menge A heisst nach oben beschränkt, falls es eine obere Schranke von A gibt.

(ii) $c \in \mathbb{R}$ ist ein untere Schranke von A falls $\forall a \in A: a \geq c$.

Die Menge A heisst nach unten beschränkt, falls es eine untere Schranke gibt.

(iii) Ein Element $M \in \mathbb{R}$ heisst ein Maximum von A falls $M \in A$ und M eine obere Schranke von A ist

d.h. $M \in A$, $\forall a \in A$ $a \leq M$

(iv) Ein Element $m \in \mathbb{R}$ heisst ein Minimum von A falls $m \in A$ und m eine untere Schranke von A ist.

Bmk: Falls A ein Maximum (Minimum) besitzt, wird es mit $\max A$ ($\min A$) bezeichnet.

Bsp.:

1) $A = [1, \infty[$ nach unten beschränkt

1 ist ein minimum von A.

A ist nach oben nicht beschränkt, es gibt auch kein maximum.

2) $A :=]-1, 1[$ ist nach oben und beschränkt.

$(-1, 1)$

kein max, kein min

3) $[-1, 1] := A$

A ist beschränkt

$-1 = \min A$

$1 = \max A$.

4) $A := (1, \infty)$

$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

A ist nach unten beschränkt

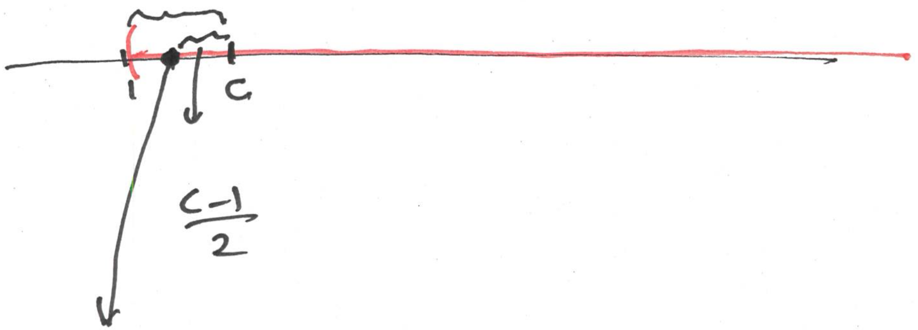
1 ist eine untere Schranke

aber so ist $0.9, 0, \ldots$

$-1, \ldots,$

A besitzt kein min.

Sei $c \in A$ eine Untere Schranke



$1 + \frac{c-1}{2} = \frac{c+1}{2}$

$\frac{c+1}{2} \in A$, und $\frac{c+1}{2} < c$

d.h $c \in A$ kein untere Schranke ist.

$\Rightarrow$ A besitzt kein minimum.

Die Menge alle untere Schranke ist $(-\infty, 1] =: B$

B besitzt ein Maximum.

$\max B = 1$.

Ähnlich $C := [1, \infty)$

C ist nach unten beschränkt, besitzt ein Min. $\min C = 1$.

Die Menge der untere Schranken von C ist $(-\infty, 1] = B$.

B besitzt ein Max.

Satz 1.1.15 Sei $A \subseteq \mathbb{R}$

$A \neq \emptyset$

i) Sei A noch oben beschränkt. Dann gibt es ein kleinste obere Schranke von A.

d.h. es gibt $c \in \mathbb{R}$ so dass

1) $\forall a \in A$, $a \leq c$
(c ist eine obere Schranke)

2) Falls $a \leq x$ $\forall a \in A$ ist, ist $c \leq x$
(c ist kleiner als jede andee obere Schranke).

c ist Supremum von A genannt

Man bezeichnet $c := \operatorname{Sup} A$

ii) Sei A noch unten beschränkt.

Dann gibt es ein grösste untere Schranke d von A.

Man bezeichnet $d := \operatorname{Inf} A$

genannt das Infimum von A.

Beweis. Sei $B := \{x \in \mathbb{R} \mid$ x ist eine obere Schranke von $A\}$.

$B \neq \emptyset$ da A noch oben beschränkt ist.

$A \neq \emptyset$ $\overset{①}{\vee}$ $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.

($\sqrt{2}$). Per definition von B

$\forall a \in A, \quad \forall b \in B$

$$a \le b.$$

Voraussetzungen ~~des~~ Vollständigkeitsaxiom sind erfüllt.

Es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{a \le c}_{} \le b, \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B.$$

$\Downarrow$

c ist eine obere Schranke von A

$c \le b \Longrightarrow$ c ist die kleinste obere Schranke.
$\forall b \in B.$

Mittels Vollst. axiom, haben wir diese kleinste obere Sch. von A gefunden ☒.

Bmk. 1) Sei A nach oben beschränkt. Dann stimmt die Menge der oberen Schranken von A mit dem Interval

$$[\sup A, \infty)$$ überein.

2). Sei A nach unten beschränkt. Dann stimmt die Menge der unteren Schranken von A ~~...~~ mit dem Interval

$$(-\infty, \inf A]$$ überein.

Bsp.

Sei $A := \left\{ \frac{2x}{x+3} \mid x > 0 \right\}$.

$\sup A = ?$

$\inf A = ?$

$\max A = ?$

$\min A = ?$

$$\frac{2x}{x+3} = \frac{2}{1+\frac{3}{x}} < 2 \quad , \forall x > 0$$

2 ist eine obere Schranke?

Nehmen wir an, dass es eine obere Schranke $c < 2$ gibt. Dann wäre $\frac{2x}{x+3} \leq c$ $\forall x > 0$.

~~Aber mit $2x = 4$~~

$$2x \leq c(x+3)$$

$$(2-c)x \leq 3c$$

Falls $x = \frac{4c}{2-c} \Rightarrow 4c \leq 3c$ ↯.

$\Rightarrow$ Es gibt kein kleinere obere Schranke als 2.

2 ist die ~~größte~~ kleinste obere Schr.

$$\boxed{\sup A = 2}.$$

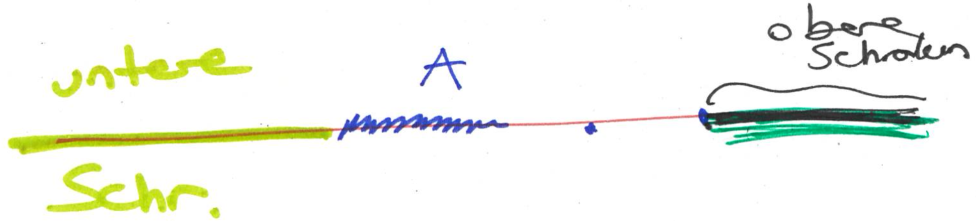
2 ist kein max:

Falls $x > 0$ gibt s.d. $2 = \frac{2x}{x+3} \Rightarrow x = x+3$
$\Rightarrow 0 = 3$ ↯.

Da $x>0$, $\frac{2x}{x+3} > 0$

$\forall x>0$.

d.h. 0 ist eine untere Schranke.



Ist 0 die "optimale" untere Schranke?

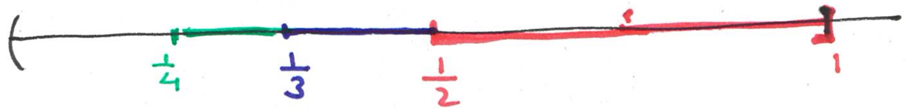
d.h ist 0 die grösste untere Schranke?

Übung: 0 ist das $\operatorname{Inf} A$.

kein min!

da $0 \notin A$.

Clicker Frage: $A = \bigcup_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.



$\sup A = \operatorname{Max} A = 1$

$\operatorname{Inf} A = 0$, kein min.

Eigenschaften des Inf. / Sups.

Kor 1.1.16 Seien $A \subset B \subset \mathbb{R}$ Teilmenge von $\mathbb{R}$.

1) Falls B nach oben beschränkt ist, folgt

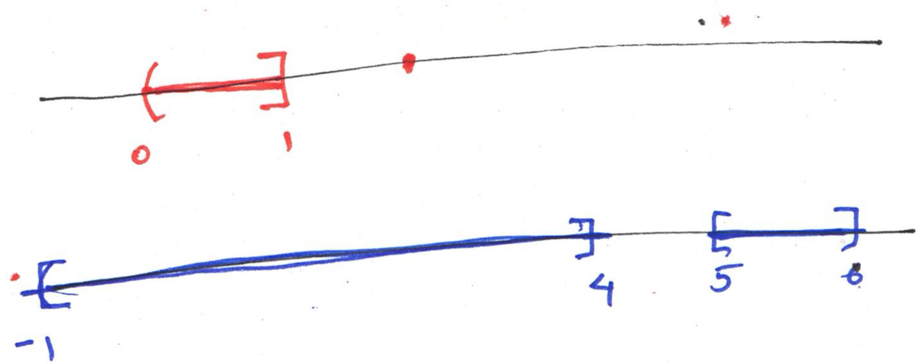
$$\sup A \leq \sup B.$$

2) Falls B nach unten beschränkt ist, folgt

$$\operatorname{Inf} B \leq \inf A.$$

Bsp. $A = (0, 1] \cup \{2\}$

$B = [-1, 4] \cup [5, 6].$



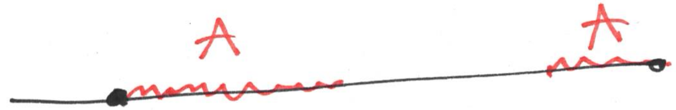
$\sup A = 2$ $\qquad$ $\sup B = 6$

$\operatorname{Inf} A = 0$ $\qquad$ $\operatorname{Inf} B = -1.$

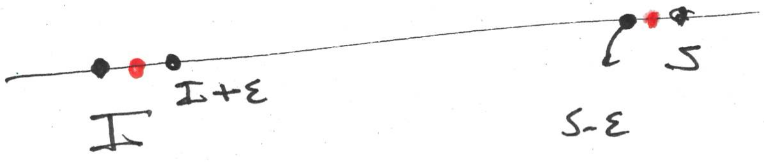
$\sup A \leq \sup B$

$\inf B \leq \operatorname{Inf} A.$

Bmk. Eine äquivalente charaterisierung des Supremums ist die folgende



Sei $S = \sup A$



d.h (S ist eine obere Schranke) $\wedge$ (S ist die kleinste)

$$\{\forall a \in A : a \leq S\} \wedge$$

$$\{\forall \varepsilon > 0 : \exists a \in A : a > S - \varepsilon\}$$

kleine Zahlen als S sind keine oberen Schranken.

$I = \operatorname{Inf} A$

$$\{\forall a \in A : a \geq I\} \wedge$$

$$\{\forall \varepsilon > 0 : \exists a \in A , a < I + \varepsilon\}$$

<u>Konvention</u>: Falls A nicht nach oben beschränkt (resp. nicht nach unten beschränkt) ist, definieren wir

$$\sup A := \infty$$
$$\inf A := -\infty.$$

<u>Bsp.</u> <u>Wichtige Bsp.</u>!

$$A = \left\{ 1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \ldots \right\}.$$

$$\inf A = 1 = \min A.$$

A ist nach oben unbeschränkt.

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}.}+ \ldots$$

$$\geq 1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}_{1}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}_{1}+\ldots$$

Wir können ein Element in in beliebigen Grösse finden in dem wir Elemente mit mehrere Summanden betrachten.

Bmk.: Für je zwei Teilmenge $A, B \subseteq \mathbb{R}$

$c \in \mathbb{R}$ setze

$$cA := \{ca \mid a \in A\}.$$

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Dann gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sup\{A \cup B\} = \max\{\sup A, \sup B\}. \\ &\sup\{A + B) = \sup A + \sup B \\ &\sup(cA) = c \sup A, \quad c > 0 \\ &\sup(cA) = c \operatorname{Inf} A, \quad c < 0. \end{aligned}}$$

Kardinalität.

Defn: Zwei Mengen X und Y heissen **gleichmächtig**, falls eine Bijektion $f : X \to Y$ gibt.

2) Eine Menge X ist **endlich**, falls entweder $X = \emptyset$ oder $\exists n \in \mathbb{N}$, so dass X und $\{1, \dots, n\}$ gleichmächtig sind.

3) Eine Menge X ist abzählbar, falls sie endlich oder gleichmächtig wie $\mathbb{N}$.

Bsp. 1) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.

2) Gerade natürliche Zahlen und natürliche Zahlen sind gleichmächtig.

$$f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$$
$$n \mapsto 2n.$$

Satz (Cantor) $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar!

Euklidische Raum

Sei $n \geq 1$

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}.$$

$$= \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ mal}}.$$

$$+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(x, y) \mapsto x + y = (x_1 + y_1, \dots x_n + y_n)$$

$$\cdot\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(c, x) \to cx = (cx_1 \dots cx_n)$$

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum.

Das Skalarprodukt zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Eigenschaften von $\langle , \rangle$

1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$
symmetry

2) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle$
$= \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.
(Bilinear)

3) $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$

mit Gleichheit genau dann wenn $x = 0$.

(positiv definit)

Cauchy-Schwarz, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Norm eines Vektors
$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Eigenschaften der Norm

- $\|x\| \geq 0$, Gleichheit wenn $x = 0$.
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Defn. Das **Kreuzprodukt** zwischen 2 Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(a, b) \longmapsto a \times b$$

$$a \times b := (a_2 b_3 - a_3 b_2, \; a_3 b_1 - a_1 b_3, \; a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

$a = (a_1, a_2, a_3)$ $\quad b = (b_1, b_2, b_3)$.

$$a \times b \text{ "="} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

$$= e_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2)$$

$$+ e_2 (b_1 a_3 - a_1 b_3)$$

$$+ e_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Sie können diese Schema verwenden, um sich die Formel zu merken.