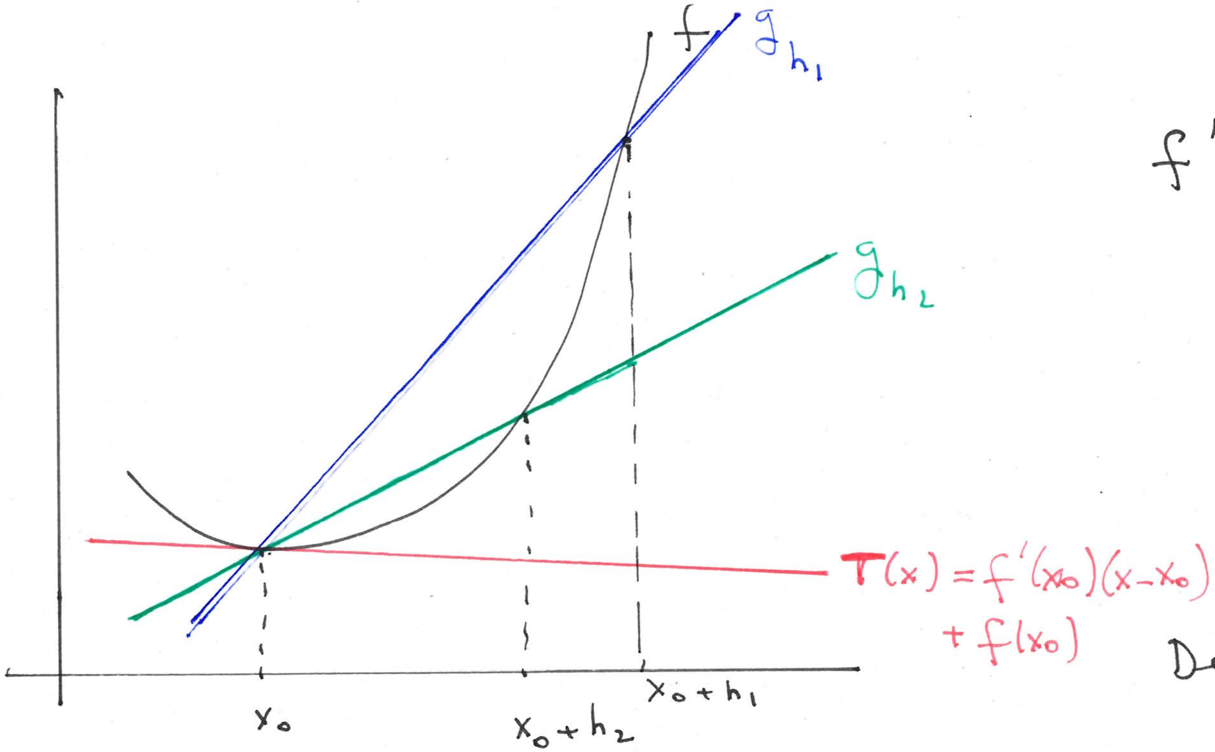
2.5.2022

Die Ableitung

Die geometrische Entsprechung der Ableitung ist die Tangentensteigung.



Analytisch: Wir betrachten den Grenzwert von der Steigung der Sekante

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Der Grenzwert der Differenzquotient

Defn Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt

f heisst in x_0 differenzierbar

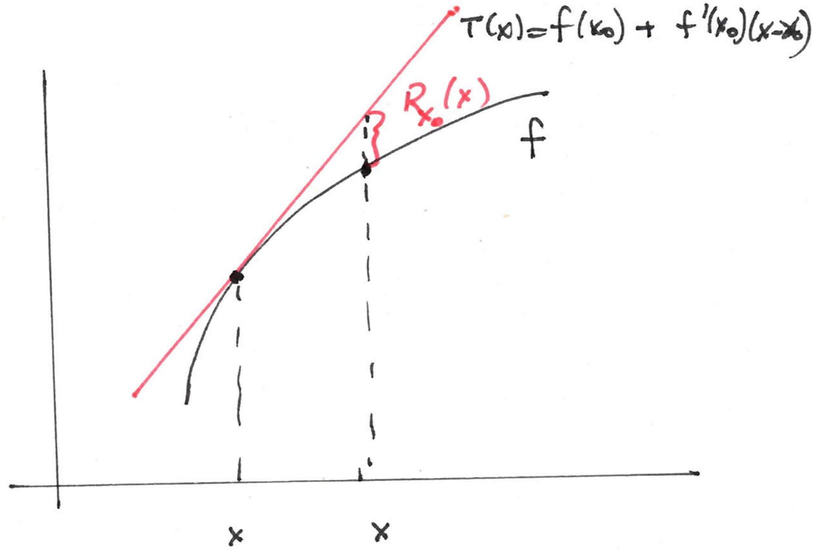
falls der Grenzwert

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =: f'(x_0)}$$

existiert. In diesem Fall wird dieser Grenzwert mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet. Er heisst die Ableitung von f an der Stelle x_0

- f heisst auf D differenzierbar falls sie in jedem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist. $D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ heisst die Ableitungs-Funktion von f.

- Falls f in x_0 differenzierbar ist dann lässt sie sich linear durch die Tangente annähren



$$R_{x_0}(x) = T(x) - f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_{x_0}(x)}{x-x_0} = 0.$$

Sei $r(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$

Dann $\lim_{x\to x_0} r(x) = 0 = r(x_0)$

Satz $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.

f ist in x_0 differenzierbar $\Longleftrightarrow$ $\exists\, c \in \mathbb{R}$, $r: D \to \mathbb{R}$ mit

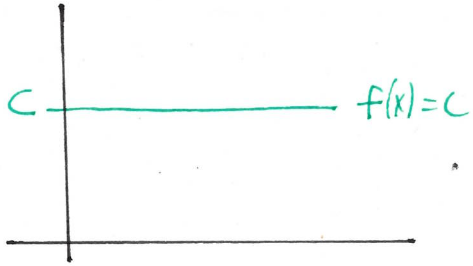
a) $f(x) = f(x_0) + c(x-x_0) + r(x)(x-x_0)$

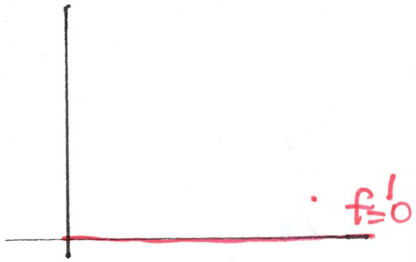
b) $r(x_0) = 0$, r ist in x_0 differenzierbar.

Bsp: 1) $f(x) = c$ (c ist konstant)

ist in jede $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar

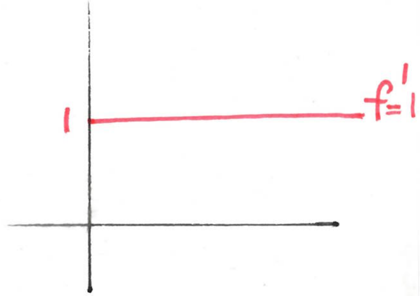
und $f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$



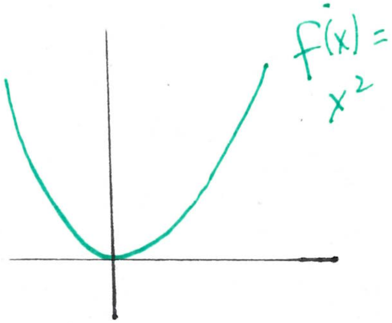


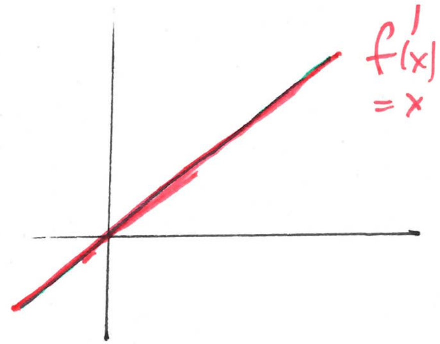
2) $f(x) = x$ ist differenzierbar $\forall x \in \mathbb{R}$ und $f'(x) = 1$.

$\boxed{f(x) = mx + b \quad f'(x) = m.}$



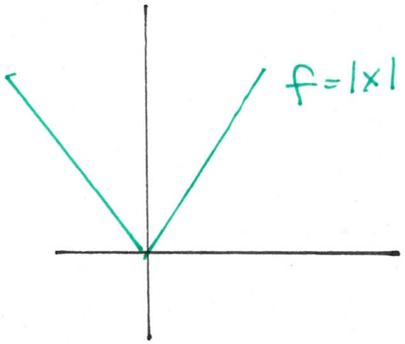
3) $f(x) = x^2$ ist differenzierbar $\forall x \in \mathbb{R}$ und $f'(x) = 2x$.

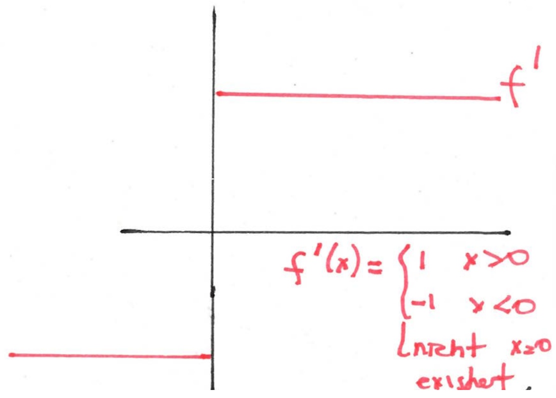




4) $f(x) = |x|$ ist differenzierbar $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

und $f(x)$ ist in $x_0 = 0$ <u>nicht</u> differenzierbar.





Satz 1 $f: D \to \mathbb{R}$, $x \in D$

f ist in x_0 differenzierbar $\iff$ $\exists c \in \mathbb{R}$, $r: D \to \mathbb{R}$ mit

a) $\boxed{f(x) = f(x_0) + c(x-x_0) + r(x)(x-x_0)}$

b) $r(x_0) = 0$, und $r(x)$ ist in x_0 differenzierbar.

Falls dies zutrifft, ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt.

Korollar Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D.

f ist in x_0 differenzierbar $\Rightarrow$ f ist in x_0 stetig.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_{x_0}(x).$$

$$= f(x) + f'(x_0)(x-x_0) + r(x)(x-x_0)$$

$$= f(x) + \underbrace{\left(f'(x_0) + r(x)\right)}_{=:\ \phi(x)}(x-x_0)$$

Setze $\phi(x) := f'(x_0) + r(x)$ dann

Satz 2. f ist in x_0 differenzierbar

$\iff$ Es gibt eine Funktion $\phi: D \to \mathbb{R}$ die

a) in x_0 stetig ist

b) $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x-x_0) \quad \forall x \in D$

In diesem Fall $\phi(x_0) = f'(x_0)$

Kor. besagt dass

f differenzierbar

$\Rightarrow$ f stetig.

Beweis (Kor)

f ist in x_0 diff.

$\overset{\text{Satz 2}}{\Longrightarrow} \exists\ \phi : D \to \mathbb{R}$

ϕ in x_0 stetig und

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \big(f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)\big)$$

$$= f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \phi(x)(x - x_0)$$

ϕ in x_0 stetig.

$$\Rightarrow = f(x_0) + \phi(x_0) \underbrace{\lim_{x \to x_0}(x - x_0)}_{0}$$

$$= f(x_0)$$

Wir haben gezeigt dass

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$\Rightarrow$ f ist in x_0 stetig.

Bmk.: Es gibt stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die an keine Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$. differenzierbar ist. !!

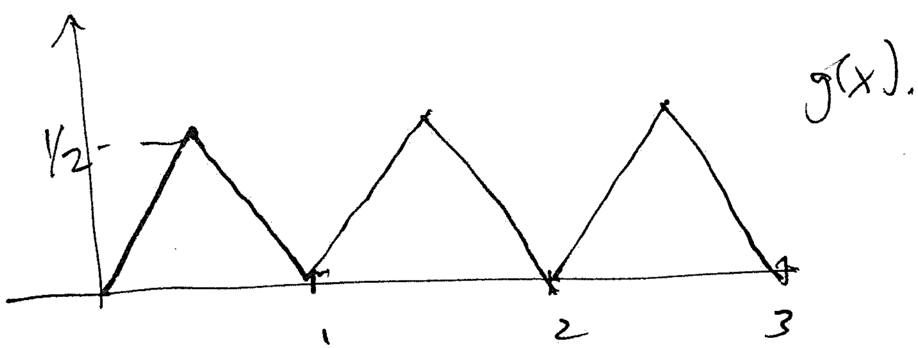
Bsp. Sei für $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \langle x \rangle$$

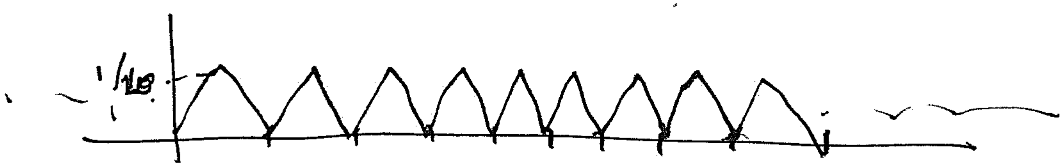
$:=$ Distanz von $\cancel{x}$ zur nächsten ganzen Zahl

$= \min \{ |x-m| \mid m \in \mathbb{Z} \}$.

$x \mapsto g(x)$



$x \mapsto \dfrac{g(10x)}{10}$



Sei $f(x) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(10^n x)}{10^n}$.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle 10^n x \rangle}{10^n}.$$

Übung !!

f ist auf $\mathbb{R}$ stetig aber in keinem Punkt differenzierbar!

Bsp. Exponential Funktion.

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ist differenzierbar

$\forall x \in \mathbb{R}$ mit

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

Beweis: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$

$x = x_0 + h \neq x_0$

$$\exp(x) - \exp(x_0)$$

$$= \exp(x_0 + h) - \exp(x_0).$$

$$= \exp(x_0)\left[\exp(h) - 1\right].$$

$$\exp h - 1 = \left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots\right) - 1$$

$$\frac{\exp h - 1}{h} = \left(h + \frac{h^2}{2!} + \cdots\right)/h$$

$$= 1 + h/2! + h^2/3! + \cdots$$

$$\frac{\exp(x) - \exp(x_0)}{x - x_0} = \frac{\exp(x_0)(\exp h - 1)}{h}.$$

$$= \exp(x_0)\underbrace{\left[\frac{\exp(h) - 1}{h}\right]}.$$

Um zu zeigen dass

$$\exp'(x_0) = \exp(x_0)$$

wir müssen zeigen:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1. \text{ klar!}$$

Bsp. $(\sin x)' = \cos x$

und $(\cos x)' = -\sin x$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

Beweis: $\dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

Aus Additionsgesetz für $\sin x$, erhalten wir

$\sin(x+h) - \sin x$

$= (\sin x \cosh + \cos x \sinh) - \sin x$

$\Rightarrow \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \dfrac{[\cosh - 1]}{h} + \cos x \left(\dfrac{\sinh}{h}\right)$

Da $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cosh - 1}{h} = 0$ (Übung)

und $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sinh}{h} = 1$, (schon gesehen)

erhalten wir

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

$= \cos x$.

Satz Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt

$f, g : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar.

Dann gelten

1) $f+g$ ist in x_0 differenzierbar und

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2) $f \cdot g$ ist in x_0 diff. und

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$$

3) Falls $g(x_0) \neq 0$, ist $\frac{f}{g}$ in x_0 diff.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Bsp: 1) $x^2 \exp(x) = h(x)$

$$h'(x) = (x^2)'\exp(x) + (x^2)(\exp x)'$$

$$= 2x\exp(x) + x^2 \exp x$$

$$= \exp(x)\left[2x + x^2\right].$$

2) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Falls $x \notin \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Bsp. 3) $(x^n)' = n x^{n-1}$

Beweis: Induktion

$n=1$, $\quad x' = x$ ✓

$x' = 1$.

$n=2 \quad (x^2)' = 2x$
$= n x^{n-1}$ ✓

Wir nehmen an:

$$(x^{n-1})' = (n-1)\, x^{n-2}$$

Dann $\quad x^n = x \cdot x^{n-1}$

und mit Produktregel

$$(x^n)' = x' \cdot x^{n-1} + x \cdot (x^{n-1})'$$
$$1\, x^{n-1} + x\,(n-1)\, x^{n-2}$$

$$= x^{n-1} + (n-1)\, x^{n-1} = n x^{n-1}$$ ✓

f	f'
x^n	$n x^{n-1}$
e^x	e^x
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$.
$\ln x$	$1/x \rightarrow$ später.
x^a	$a x^{a-1} \rightarrow$ später.

Beweis (Produktregel).

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{[f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)]}{x - x_0}$$

$$= \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right] g(x) + f(x_0)\left[\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right]$$

f in x_0 diff. $\downarrow x \to x_0$ $\quad \downarrow x \to x_0$ (g stetig in x_0) $\quad \downarrow$ $\quad \downarrow$ g in x_0 diff.

$$f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0).$$

(Da g in x_0 diff ist, ist sie auch in x_0 stetig.)

Um z.B.

$$f(x) = \exp(3x^2 + \cos x)$$

zu Ableiten, wir haben die nächste regeln:

Kettenregel.

Chain rule.

Satz (Kettenregel) (chain rule)

Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt.
Sei $f: D \to E$ in x_0 diff
so dass $y_0 := f(x_0) \in E$, Häufungsp. ist
Sei $g: E \to \mathbb{R}$ in y_0 diff. Dann
ist $g \circ f: D \to \mathbb{R}$ in x_0 diff. und

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$$

Kor Sei $f: D \to E$ ein bijektive Funktion, $x_0 \in D$. Wir nehmen an dass f in x_0 diff. und $f'(x_0) \neq 0$. Zudem nehmen wir an f^{-1} ist in $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann ist y_0 ein Häufungspunkt von E, f^{-1} ist in y_0 diff. und

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

Bmk.:

$$(g \circ f)'(x_0) = g' \cdot f'$$

Aber !!!!

$$g' \downarrow \quad f' \downarrow$$

$$g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Bsp.: 1) $h(x) = \underbrace{\exp}_{g} \circ \underbrace{(3x^2 + \cos x)}_{f}$.

$$h'(x) = \underbrace{\exp'(3x^2 + \cos x)}_{g'(f(x))} \cdot f'$$

$$= \exp(3x^2 + \cos x) \cdot [6x - \sin x]$$

Bsp: 2) $\sin(x^2+5) = f$

$$f' = \sin'(x^2+5) \cdot (x^2+5)'$$

$$= \cos(x^2+5) \cdot 2x$$

3) $$\left((11x^5 + 3x+1)^{2022}\right)'$$

$$g(x) = x^{2022}$$

$$f(x) = 11x^5 + 3x + 1$$

$$(g \circ f)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$= (2022)(11x^5+3x+1)^{2021} \cdot (55x^4+3).$$

Idee: Beweis von Kor.

Falls wir schon bewiesen dass f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ diff. ist, so folgt.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

Kettenregel $\Longrightarrow$

$$(f^{-1} \circ f)'(x) = (x)' = 1$$

$\Downarrow$ Kettenregel

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

sei $f(x_0) = y_0$

$$(f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1.$$

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.}$$

Bsp. $g(x) = \ln x$.

$g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$

~~Dann~~ $x \longmapsto \ln x$.

Dann $\ln x$ ist auf $]0, \infty[$ diff.

und $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}.}$

Beweis: $f(x) = \exp x$

$f^{-1}(x) = \ln x = g(x)$

sei $y_0 = \exp x_0$.

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\exp x_0}$$

$$= \frac{1}{y_0}.$$

$a \in \mathbb{R}$.

Bsp: $x^a := \exp(a \ln x) \quad x > 0$

$$(x^a)' = \exp'(a \ln x) \cdot (a \ln x)'$$

$$= \exp(a \ln x) \cdot a (\ln x)'$$

$$= \exp(a \ln x) \cdot a \cdot \frac{1}{x} = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x}$$

Bmk $f(x) = a\,g(x)$

$a \in \mathbb{R}$, $f' = a g'$

$$\boxed{(x^a)' = a x^{a-1}}$$

Achtung! Die Annahme $f'(x_0) \neq 0$ in Kor. ist wichtig.

Bsp. Sei $f(x) = x^3$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^3$$

Ist stetig $\forall x \in \mathbb{R}$.
und diff. $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f^{-1}(x) = x^{1/3}$$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{3} x^{1/3 - 1}$$
$$= \frac{1}{3} x^{-2/3}$$
$$= \frac{1}{3x^{2/3}}$$

In $x=0$ nicht differenzierbar.

$$f'(x) = 3x^2$$
$$f'(0) = 0 \; !!$$

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{\underline{f'(x_0)}}}$$

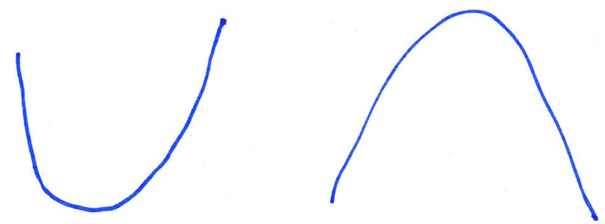
gilt nur
wenn $f'(x_0) \neq 0$.

§4.2 Zentrale Sätze über die erste Ableitung

Coming attraction:

1. Wir studieren die Ableitung einer Funktion und benutzen die Ableitung um Max, Min einer Funktion zu finden.

2. Wir studieren zweite Ableitung $(f')'$ um die Krummung einer Funktion zu finden.



Defn Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.

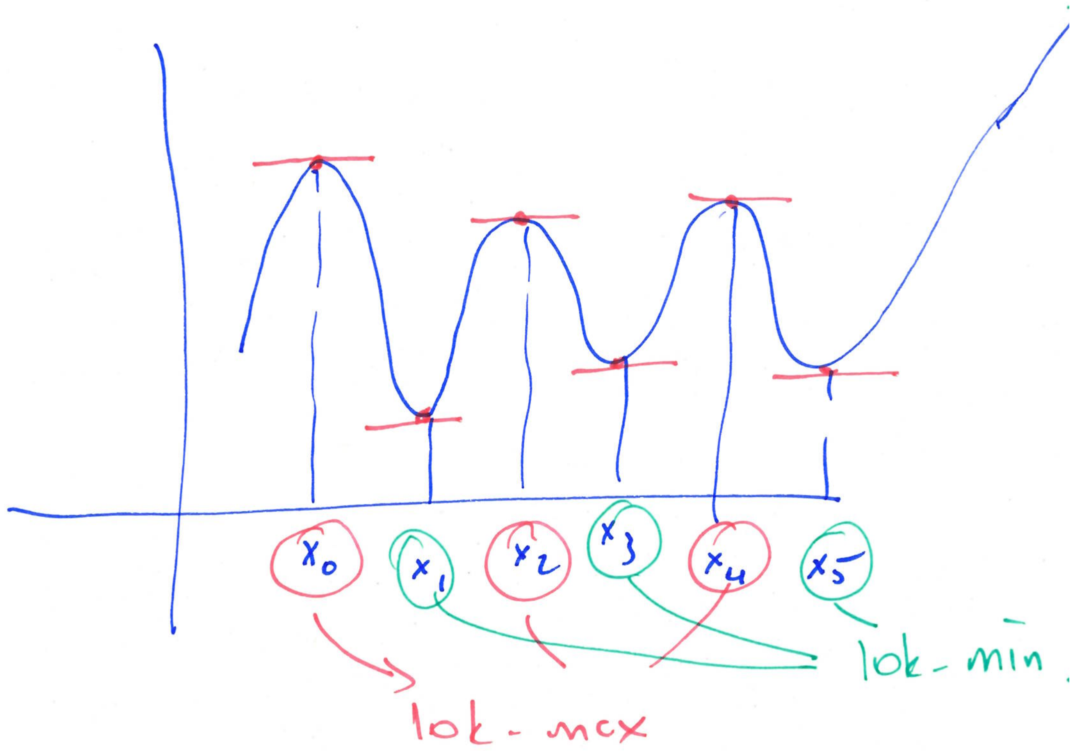
1) f besitzt eine **lokales Maximum** in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\, x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

2) f besitzt _____ **lokales Minimum** in x_0 _____ $\delta > 0$ _____

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall\, x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

3) f besitzt ein lokales Extremum in x_0 falls es entweder ein lok. min oder lok. max von f ist.



Clicker Frage

f stetig

$\Rightarrow f$ differenzierbar?

Falsch.

Bsp $f(x) = |x|$

ist in $x=0$

stetig aber nicht

diff.