4.5.2022

$f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt

$$\boxed{f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

Steigung der Tangente

= Grenzwert von der

Steigung der Sekante.

Gleichung der Tangente

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Satz f ist in x_0 diff

$\Longrightarrow f$ ist in x_0 stetig.

Satz f, g in x_0 diff. Dann

① $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

② $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$

③ $(f/g)(x_0) = [f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)] / g^2(x_0)$

Kettenregel

Satz f in x_0 diff., g in $f(x_0)$ diff. Dann $(g \circ f)$ in x_0 diff und $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Bsp.

f	f'
x^a	$a x^{a-1}$, $\forall a \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x
$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\ln x$	$1/x$.

Satz f in x_0 diff., bijektiv und $f'(x_0) \neq 0$. Dann f^{-1} ist in $y_0 = f(x_0)$ stetig und diff. mit $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$

Achtung!

- $\boxed{f \text{ ist stetig in } x_0 \not\Rightarrow f \text{ in } x_0 \text{ diff.}}$!

Bsp. $f(x) = |x|$ ist in $x=0$ stetig aber nicht diff.

- Es gibt Funktionen die auf $\mathbb{R}$ stetig sind aber nirgends differenzierbar!

Defn $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$

$x_0 \in D$

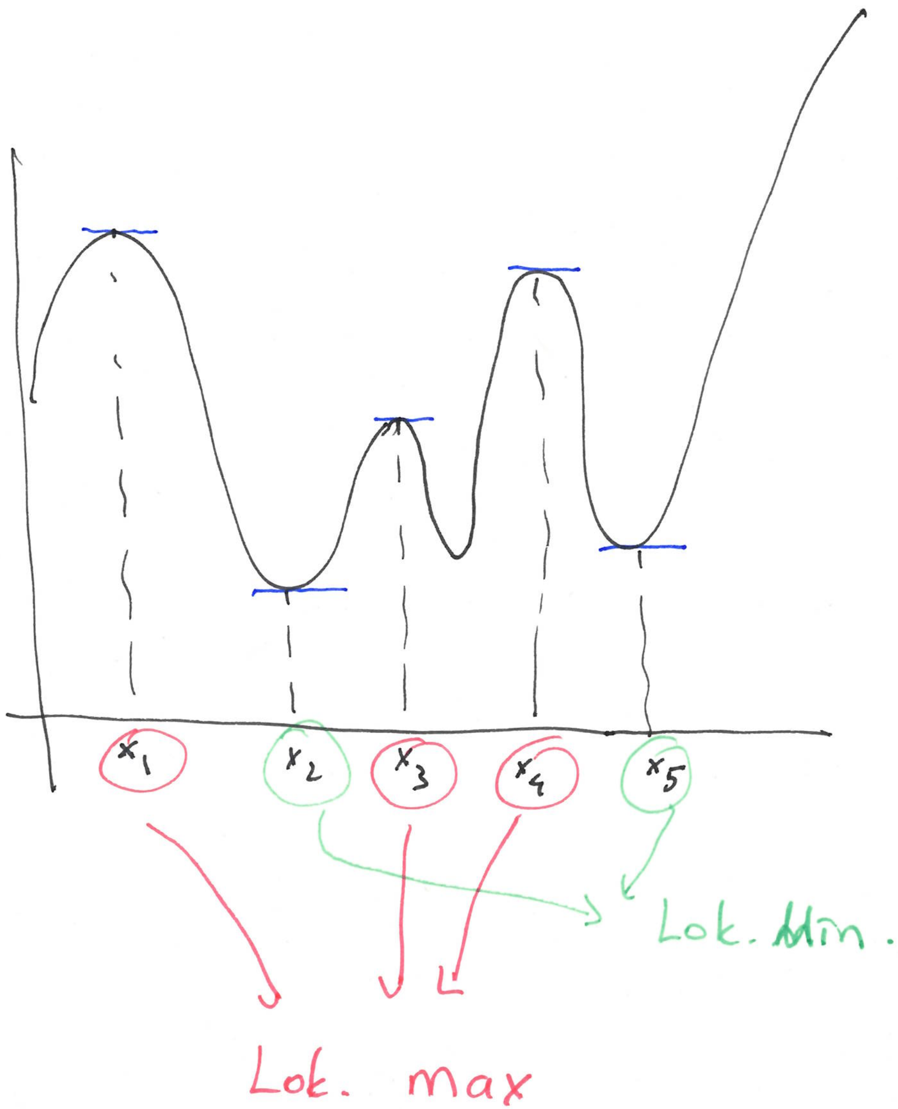
- x_0 lokales Minimum von f falls es $\delta > 0$ gibt mit

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$$

- x_0 lokales Max. von f falls es $\delta > 0$ gibt mit

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$$

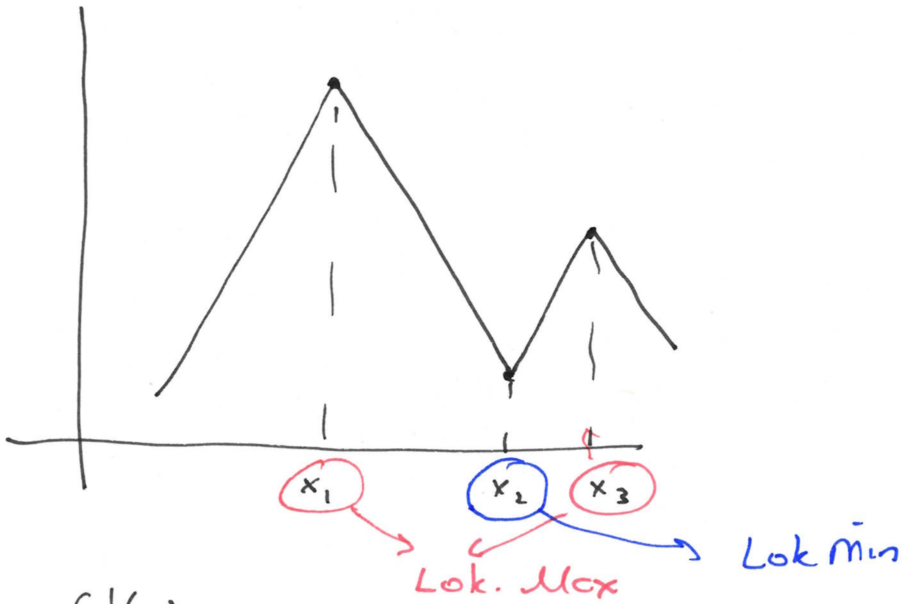
- x_0 Extremum von f falls es entweder ein lok. min oder lok. max von f ist



Bmk. Die Steigung der Tangente sind Null an dieser Punkte.

Die Tangente sind horizontal!

oder



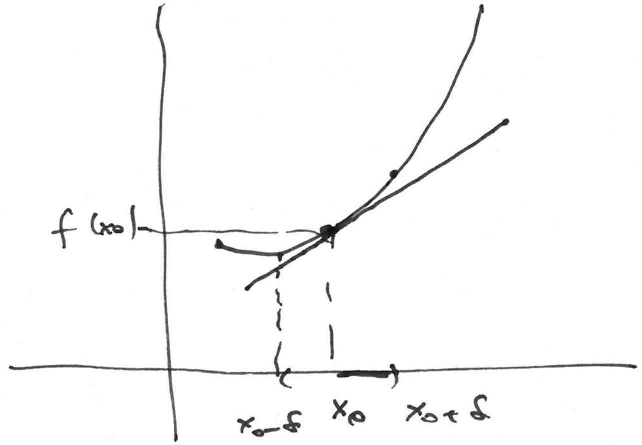
$f'(x)$ ist nicht definiert in x_1, x_2, x_3 !!!

Satz. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. $x_0 \in]a,b[$. Wir nehmen an: f ist in x_0 diff.

1) Falls $f'(x_0) > 0$, gibt es $\delta > 0$ mit $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in]x_0, x_0+\delta[$
$f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in]x_0-\delta, x_0[$.

2) Falls $f'(x_0) < 0$, gibt es $\delta > 0$ mit $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in]x_0-\delta, x_0[$
$f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in]x_0, x_0+\delta[$.

3) f besitzt ein lokales Extremum in x_0 $\Longrightarrow$ $f'(x_0) = 0$



Zur Erinnerung: $f: D \to \mathbb{R}$.

f ist in x_0 diff. $\Longleftrightarrow$ $\exists \phi: D \to \mathbb{R}$ ϕ ist in x_0 stetig.

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0) \quad \forall x \in D.$$

In diesem Fall $\phi(x_0) = f'(x_0)$.

Defn. Eine kritische Stelle einer Funktion ist ein Punkt x_0, an der $f'(x_0)$ null oder undefiniert ist.

Beweis. 1) f in x_0 diff.

$\exists\ \phi$ so dass ϕ ist stetig

$\phi(x_0) = f'(x_0) > 0$

Da $\phi(x)$ stetig ist und $\phi(x_0) > 0$, $\exists\ \delta > 0$ mit

$\phi(x) > 0 \quad \forall\ x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

(Stetige Funktionen kann ihren Wert plötzlich nicht ändern!) **

Beweis: $\varepsilon = \frac{\phi(x_0)}{2} > 0$

Dann da ϕ stetig in x_0 ist.

$\exists\ \delta > 0$ s.d

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(x_0)| < \frac{\phi(x_0)}{2}$

$$-\frac{\phi(x_0)}{2} < \phi(x) - \phi(x_0) < \frac{\phi(x_0)}{2}$$

$$0 < \frac{\phi(x_0)}{2} < \phi(x) < \frac{3\phi(x_0)}{2}$$

Dann folgt für $x \in]x_0, x_0 + \delta[$

so dass $x - x_0 > 0$.

und $\phi(x) > 0$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\phi(x)}_{>0}\underbrace{(x - x_0)}_{>0}$$

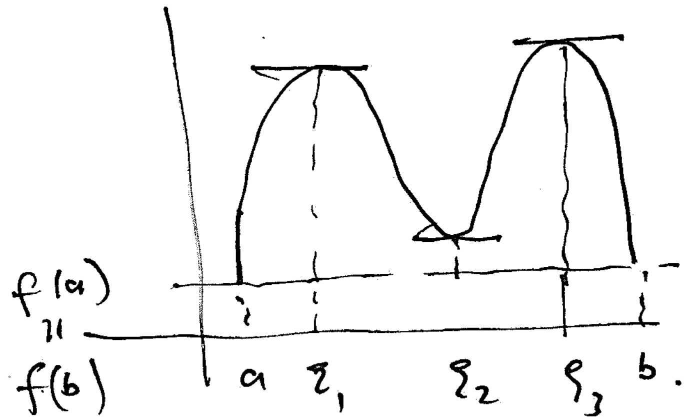
$\Rightarrow f(x) > f(x_0) \quad \forall\ x \in]x_0, x_0 + \delta[$

Analog falls $x \in]x_0 - \delta, x_0[$

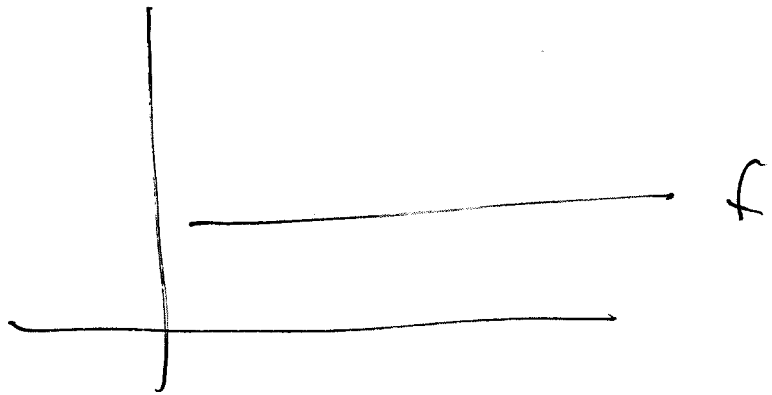
so dass $x - x_0 < 0$

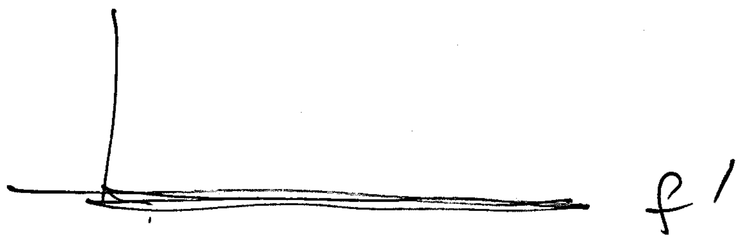
dann $f(x) < f(x_0)$.

3) Falls f in x_0 lok. Ext besitzt, dann wegen (1) und (2) weder $f'(x_0) > 0$ noch $f'(x_0) < 0$ gelten. Also $f'(x_0) = 0$!



Satz (Rolle) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und in $]a,b[$ diff. Falls $f(a) = f(b)$, dann ist mindestens an einer Stelle $\xi \in]a,b[$, $f'(\xi) = 0$.





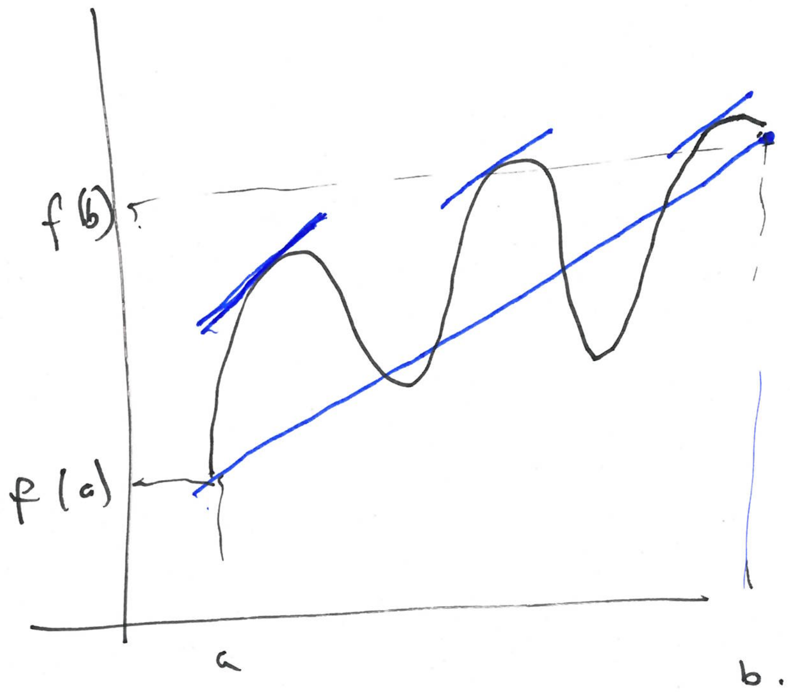
Satz (Langrange, Mittelwertsatz)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $]a,b[$ diff. Dann gibt es (mindestens eine) $\xi \in]a,b[$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

d.h.

$$\underbrace{\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}}_{\text{Steigung der Sekante.}} = \underbrace{f'(\xi)}_{\text{Steigung der Tangente im Punkt } \xi.}$$



Beweis (Rolle).

f ist stetig in $[a,b]$

Mit Min-Max Satz

gibt es $u, v \in [a,b]$

mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v)$$

$$\forall x \in [a,b].$$

Falls eines der beiden $u, (v) \in]a,b[$ liegt

dann können wir $\xi = u$

(oder v) nehmen..

d.s. u ist ein Min in $]a,b[$.

In einer extr. Stelle, haben wir schon gesehen

dass $f'(u) = 0$.

So nehmen wir ξ als u.

Falls aber $\{u, v\} = \{a, b\}$.

folgt $f(u) = f(v)$ ist,

da unsere Annahme

$f(a) = f(b)$ ist.

d.h. f ist konstant.

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a,b[$$

Beweis (Lagrange) Idee:

~~Se~~ Die Gleichung der Sekante

$(a, f(a))$, $(b, f(b))$

$$g(x) = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a) + f(a)$$

Sei $h(x) = f(x) - g(x)$

Dann
- $h(a) = 0$
- $h(b) = 0$

Wir wenden Rolle's Satz an.

<u>**Kor.**</u> Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ diff.

1) Falls $f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in]a,b[$ ist f konstant.

2) Falls $f'(\xi) = g'(\xi)$ $\forall \xi \in]a,b[$, gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in]a,b[.$$

3) Falls $f'(x) \geq 0 \quad \forall \cancel{\xi}\, x \in]a,b[$, ist f auf $]a,b[$ mon wachsend.

4) Falls $f'(x) \leq 0 \quad \forall \cancel{\xi}\, x \in]a,b[$, ist f auf $]a,b[$ mon. fallend.

5) $f'(x) > 0$ $\forall x \in]a,b[$ $\Longrightarrow$ f ist strikt mon. wachsend.

6) $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ strikt mon. fallend

7) Falls es $M > 0$ gibt mit $|f'(\xi)| \leq M \quad \forall \xi \in]a,b[$ dann folgt $\forall x_1, x_2 \in]a,b[$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$$

<u>Beweis</u> 1) Seien $a < x < y < b$ beliebig. Nach M.W.S. (Mittelwertsatz) $\exists x_0 \in]x,y[$ mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y-x} = \underbrace{f'(x_0)}_{= 0}$$

Nach unsere Annahme $f'(\xi)=0$

$\Rightarrow f(y) = f(x)$

Da x, y beliebig waren $\Rightarrow f(y) = f(x)$ $\forall x, y \in]a,b[$

$\Rightarrow f$ ist konstant.

2) folgt aus 1) angewendet auf $h = f - g$.

$h'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in]a,b[$

$\Rightarrow h =$ konstant

$\Rightarrow f - g = c$

$\Rightarrow f = g + c$.

3), 4, 5, 6 Übung.

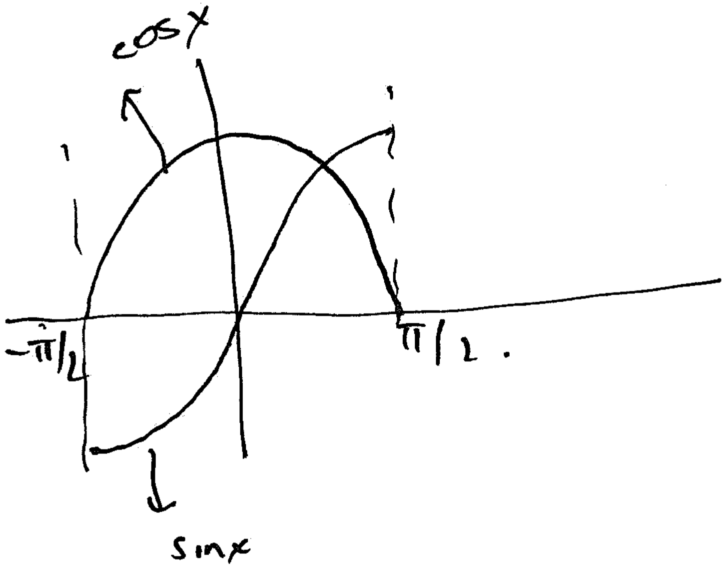
Bsp. Trigonometrische Funktionen.

1) arcsin:

Wir haben gesehen

$\sin'(x) = \cos x$

und $\cos x > 0 \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.



Dann folgt dass

$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$

streng mon. wachsend

$\sin'(x) > 0 \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

also ist sie bijektiv.

Wir definieren Umkehr Funktion:

$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Die Umkehr Funktion diff. ist und für

$y = \sin x \quad , x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x}$$

Nun müssen wir $\cos x$ als eine Funktion von y schreiben

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$y^2 = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - y^2$$

Da $\cos x > 0$, $\cos x = \sqrt{1-y^2}$

$$\boxed{\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

2) arccos

$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$.

bijektive diff.

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

$$\boxed{\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}.}$$

3) arctan Für $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

$\tan x$ ist auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ streng mon. wachsend.

$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \left]-\infty, \infty\right[$

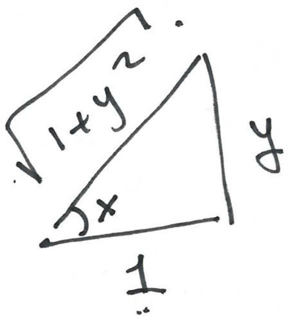
bijektive.

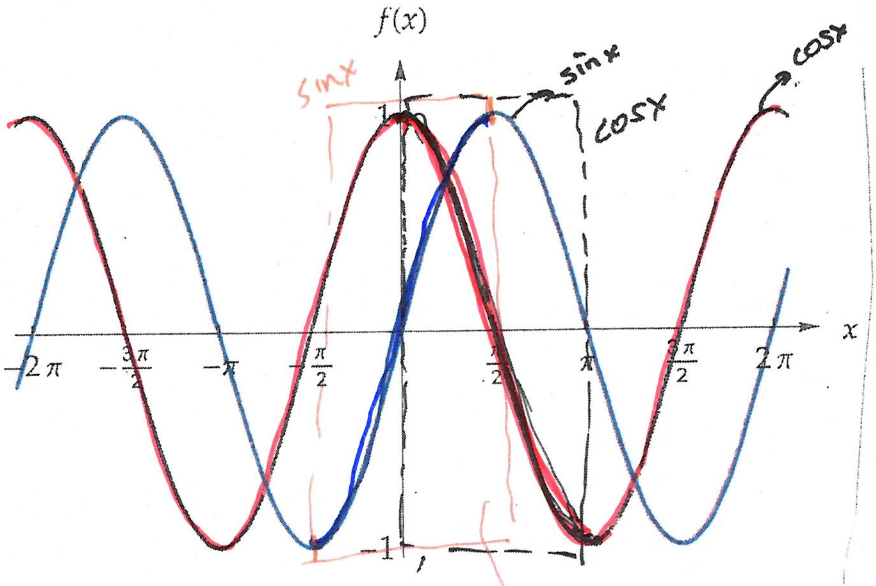
$\arctan : \left]-\infty, \infty\right[\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\arctan' y = \frac{1}{1/\cos^2 x}$$

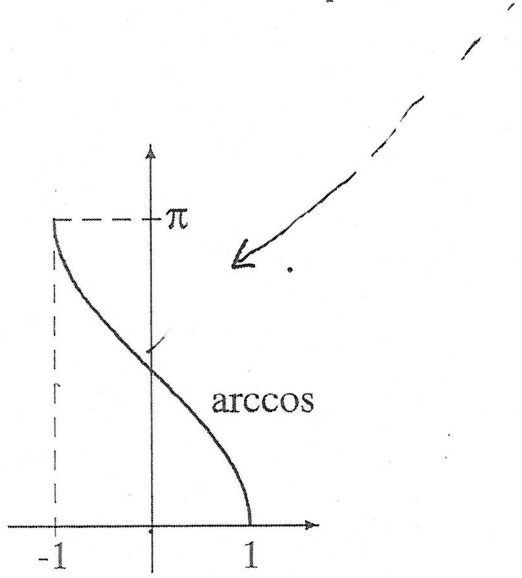
$$= \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$$

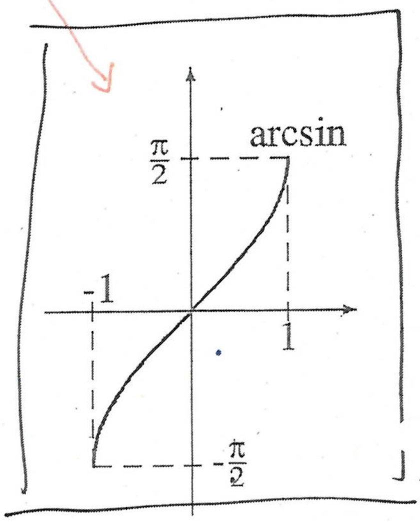
$(\tan x = y)$

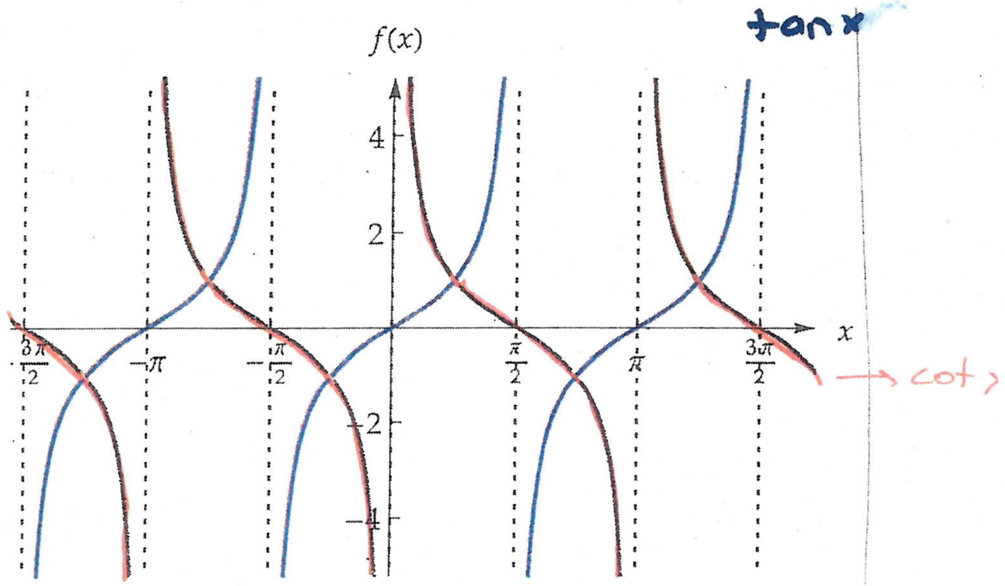




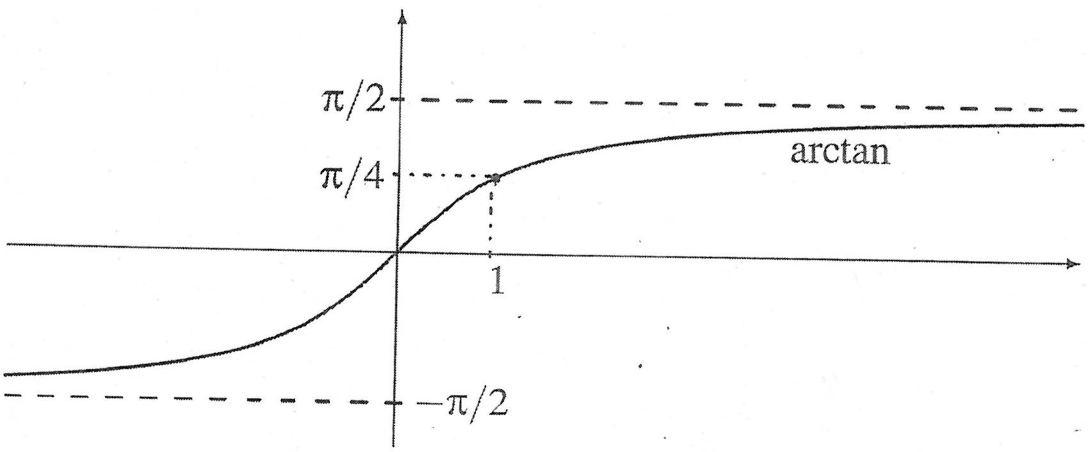
a Die 2π-periodischen Funktionen $\sin x$ (blau) und $\cos x$ (rot)







b Die π-periodischen Funktionen $\tan x$ (blau) und $\cot x$ (rot)



Hyperbel Funktionen

- $\cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to [1, \infty]$

- $\sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $\tanh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} : \mathbb{R} \to]-1, 1[$

Dann gelten

1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

2) $\sinh'(x) = \cosh x$

3) $\cosh'(x) = \sinh x$

4) $\tanh'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

Die Umkehr Funktionen

- $\operatorname{arcsinh} = \sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $\operatorname{arcsinh}'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$

- $\operatorname{arccosh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $\operatorname{arccosh}'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad \forall y \in]1, \infty[$

- $\operatorname{arctanh} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$

- $\operatorname{arctanh}'(y) = \dfrac{1}{1 - y^2}, \quad -1 < y < 1.$

Satz (L'Hospital Bernoulli).

Seien $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ diff. mit $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]a, b[$.

Falls $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = 0$

und $\lim\limits_{x \to b^-} g(x) = 0$

und $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$

existiert, folgt

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda .$$

Bmk: Satz gilt auch falls

- $b = \pm\infty$
- $x \to b^+$
- Falls $\lim f = \infty$ $\lim g = \infty$

Beweis: Folgt aus ein verallg. von M.W.S.

Satz (Cauchy). seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig in $]a, b[$ diff. Dann gibt es $\xi \in]a, b[$ mit

$$g'(\xi)\,(f(b)-f(a)) = f'(\xi)\,(g(b)-g(a)).$$

Falls $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

folgt $g(a) \neq g(b)$ und

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Bsp: $\forall a > 0$.

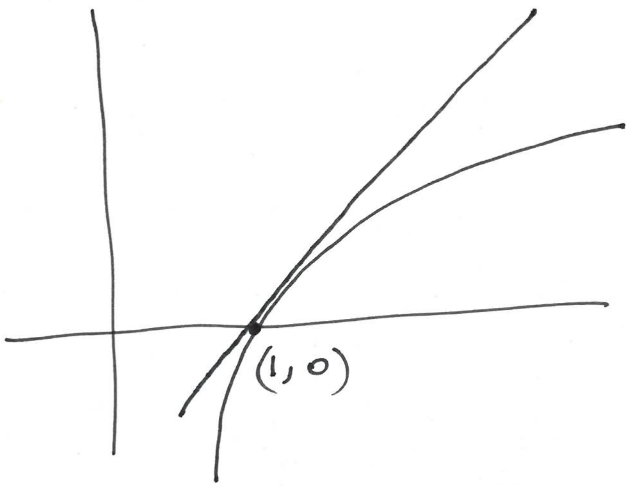
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0.$$

$\downarrow$

Besagt dass $\ln x$ wächst langsamer als jeder Potenz x^a.

Clicker Frage:

Sei $f(x) = \ln x$. Die Gleichung der Tangente im Punkt $x=1$ ist



$m =$ Steigung der Tangente

$f'(1) = 1$, Da

$f'(x) = \frac{1}{x}$.

$m = 1$ $\qquad m$

Punkt $(1, 0)$ $\qquad (x_0, y_0)$

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$y = 1(x-1) = x-1.$$

Clicker Frage

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijek.

diff.

f^{-1} Umkehr Funk.

$f(1) = 2$ $\quad f'(1) = 4$

$f(2) = 3$ $\quad f'(2) = 5$

$$(f^{-1})'(2) = 1/f'(1) = \frac{1}{4}.$$

$$y_0 = 2 = f(\underset{\overset{\shortparallel}{x_0}}{1})$$