9.5.2022

Zentrale Sätze über die Ableitung

Satz: Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$, f ist diff. in x_0.

1) Falls $f'(x_0) > 0$, gibt es $\delta > 0$ mit $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in]x_0, x_0+\delta[$ und $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in]x_0-\delta, x_0[$

2) Falls $f'(x_0) < 0$, gibt es $\delta > 0$ mit
$f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in]x_0-\delta, x_0[$
$f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in]x_0, x_0+\delta[$

3) Falls f in x_0 ein lok. Extrema hat, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Satz (Rolle) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar. Falls $f(a) = f(b)$, dann gibt es $\xi \in]a,b[$ mit $f'(\xi) = 0$

Satz (Lagrange – Mittelwertsatz) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ diff. Dann gibt es $\xi \in]a,b[$ mit
$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

Kor Seien $f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ diff.

1) Falls $f'(\xi) = 0$ $\forall \xi \in]a,b[$, dann ist f konstant

2) Falls $f'(\xi) = g'(\xi)$ $\forall \xi \in]a,b[$, dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c$ $\forall x \in]a,b[$

3) Gilt für alle $x \in]a,b[$, dass

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0, \\ f'(x) \geq 0, \\ f'(x) < 0, \\ f'(x) \leq 0, \end{array}\right\} \text{ dann ist } \left\{\begin{array}{l} f \text{ streng mon } \nearrow \\ f \text{ mon. } \nearrow \\ f \text{ streng mon } \searrow \\ f \text{ mon. } \searrow \end{array}\right.$$

4) Falls es $M \geq 0$ gibt mit $|f'(\xi)| \leq M$ $\forall \xi \in]a,b[$, dann folgt $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$
$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$$

Bernoulli, L'Hospital

Satz Seien $f,g:]a,b[\to \mathbb{R}$ diff. mit $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]a,b[$. Falls $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = 0$ und $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$ existiert, dann folgt dass
$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda.$$

Trig. Funktionen

$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ bijek.

$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$

$$\boxed{\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ bijek.

$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$

$$\boxed{\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$

$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[$

$$\boxed{\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}}$$

Hyperbol Funk.

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \longrightarrow [1, \infty]$$

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[.$$

Dann gelten 1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

2) $\sinh'(x) = \cosh x$

3) $\cosh'(x) = \sinh x$

4) $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

Die Umkehr Funktionen (Areafunktionen)

$\operatorname{arcsinh} = \sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\operatorname{arcsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ $\forall y \in \mathbb{R}$

$\operatorname{arccosh} :]1, \infty[\to \mathbb{R}$

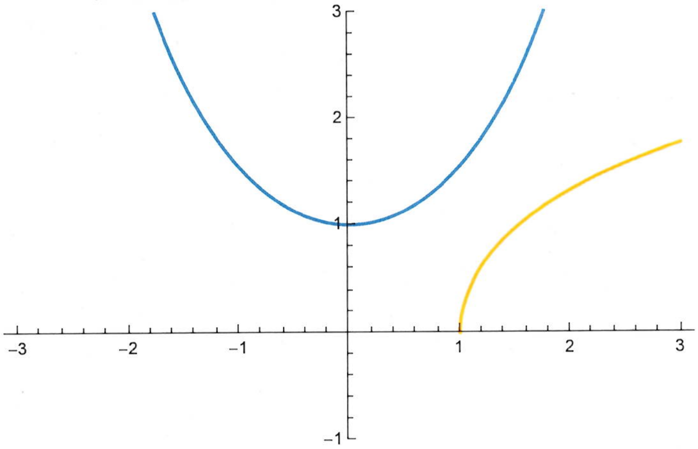
$\operatorname{arccosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ $\forall y \in]1, \infty[$

$\operatorname{arctanh} :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$\operatorname{arctanh}'(y) = \frac{1}{1-y^2}$, $-1 < y < 1$

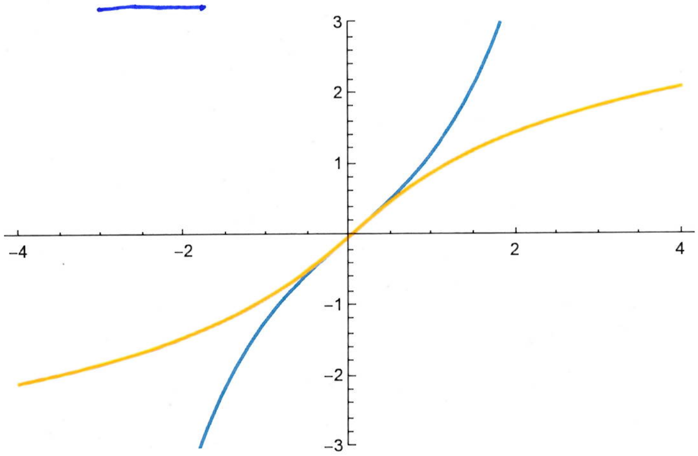
```
In[5]:= Plot[{Cosh[x], ArcCosh[x]}, {x, -3, 3}, PlotRange → {-1, 3}]
```

Out[5]=



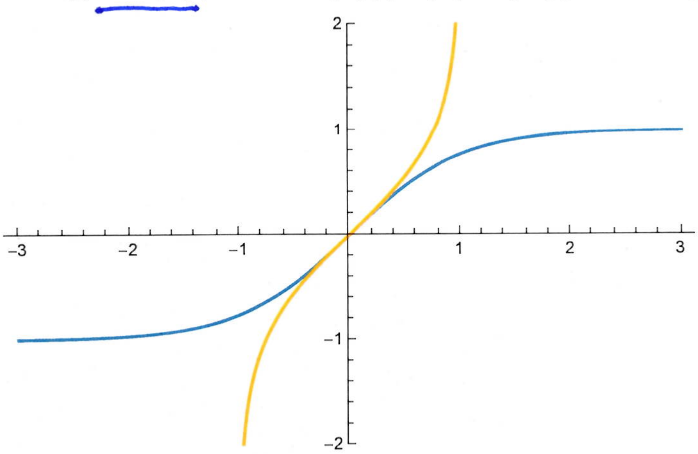
```
In[10]:= Plot[{Sinh[x], ArcSinh[x]}, {x, -4, 4}, PlotRange → {-3, 3}]
```

Out[10]=



```
In[8]:= Plot[{Tanh[x], ArcTanh[x]}, {x, -3, 3}, PlotRange → {-2, 2}]
```

Out[8]=



<u>Bsp.</u> 1) $\forall a > 0$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0}$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x^a = \infty.$$

$\ln x$ wächst langsamer als jede Potenz x^a.

$$(\ln x)' = 1/x$$

$$(x^a)' = a x^{a-1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^a)'} = \lim \frac{1}{x \cdot a x^{a-1}} = \lim \frac{1}{a x^a} = 0.$$

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{x^2} = \frac{\infty}{\infty}$$
$$\parallel$$
$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty.$$

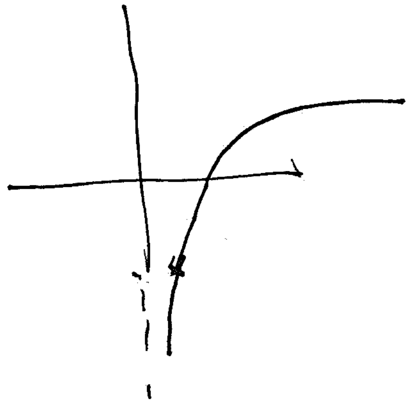
- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{x^7} = \frac{\infty}{\infty}$$
$$\parallel$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^5}{7x^5} = \frac{\infty}{\infty}.$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{5}{7} = \frac{5}{7}.$$

2) $\lim_{x \to 0} x \ln x$

$x \to 0$, $x \downarrow 0$, $\ln x \downarrow -\infty$

$0 \cdot (-\infty)$



$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \frac{\infty}{\infty}.$$

|| L'hospital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} (-x) = 0.$$

3) $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{L'H.}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(x^2)'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2} \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}}_{\downarrow\ 1.}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

§ 4.3 Höhere Ableitungen

Zweite Ableitung $\longleftrightarrow$ Konvexität

Defn. $f : I \to \mathbb{R}$

1) f ist konvex auf einem Intervall I, falls für alle $x_0 < x_1$, $x_0, x_1 \in I$ und $t \in [0,1]$

$$f(\widehat{t x_1 + (1-t) x_0}) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_0)$$

gilt.

2) f ist streng konvex auf I - - - -

- - -

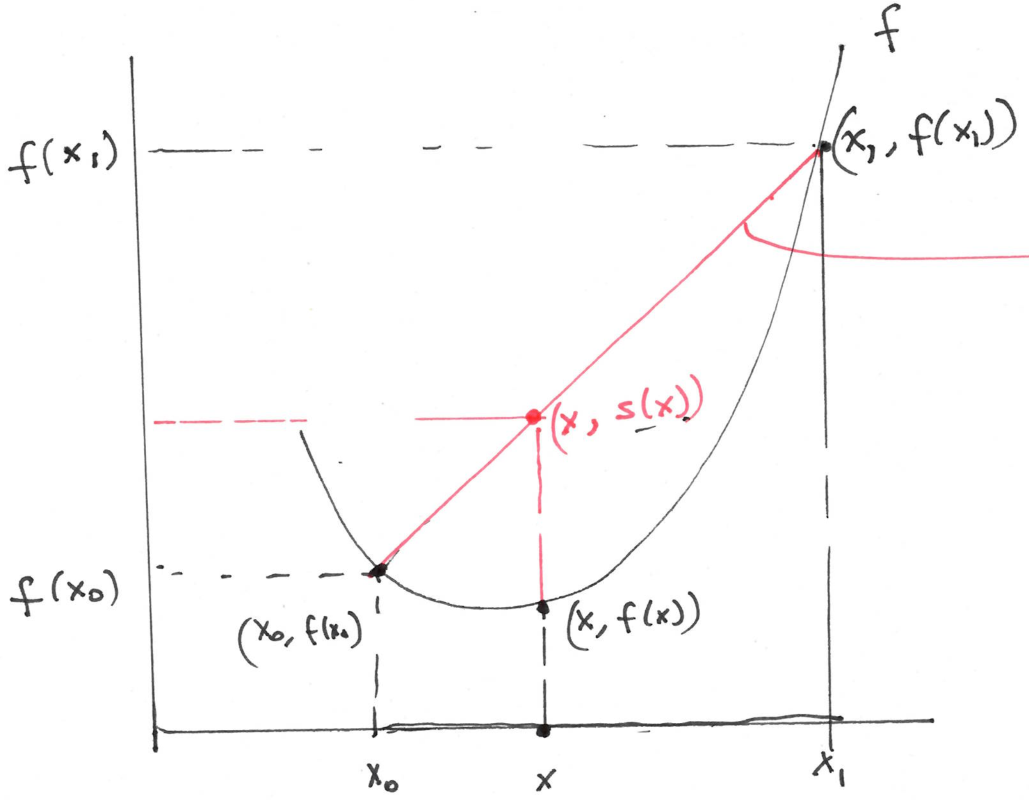
$$f(t x_1 + (1-t) x_0) < t f(x_1) + (1-t) f(x_0).$$

3) f ist konkav auf I falls $\forall\, x_0 < x_1$, $\forall\, t \in [0,1]$.

$$f((t x_1) + (1-t) x_0) \geq t f(x_1) + (1-t) f(x_0)$$

4) streng konkav

$>$



$$s(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$= t\, f(x_1) + (1-t)\, f(x_0)$$

$x \;\|\;$ Eine Parametrisierung $\longrightarrow tx_1 + (1-t)x_0$ von segment zwischen $(x_0, 0)$ und $(x_1, 0)$

$t = 0 \Rightarrow x_0$

$t = 1 \Rightarrow x_1$

$$x = tx_1 + (1-t)x_0$$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = t$$

f konvex $:\Leftrightarrow$ Für alle $x_0 < x_1$ und $t \in [0,1]$

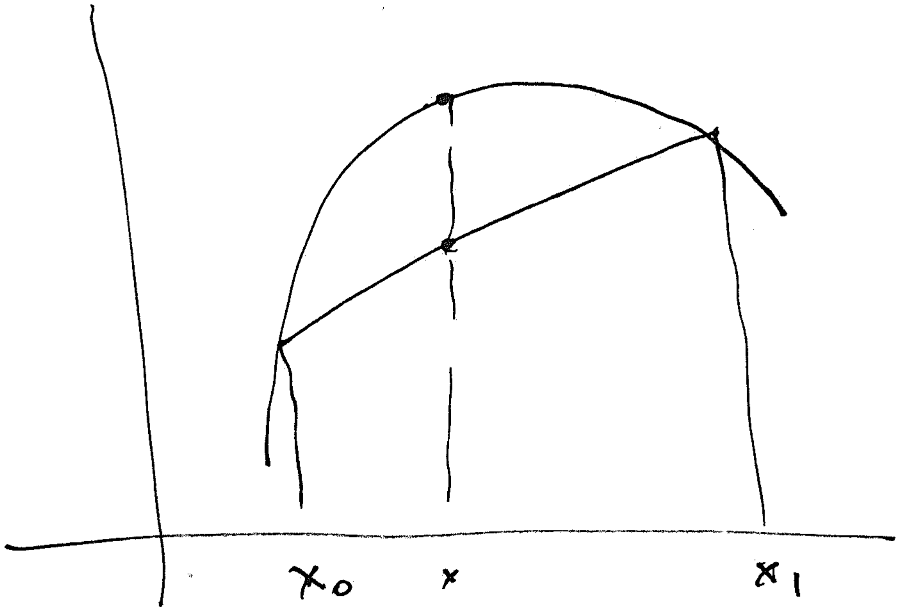
$$f(tx_1 + (1-t)x_0) \leq t\, f(x_1) + (1-t) f(x_0)$$

gilt.

(i.e. $f(x) \leq s(x)$.

for $x = tx_1 + (1-t)x_0$)

Bmk: $tx_1 + (1-t)x_0$, $0 \leq t \leq 1$ ist eine Parametrisierung der segment zwischen $(x_0, 0)$ und $(x_1, 0)$.



konkav

Bmk. ① Funktionen der Form

$x \longmapsto ax+b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

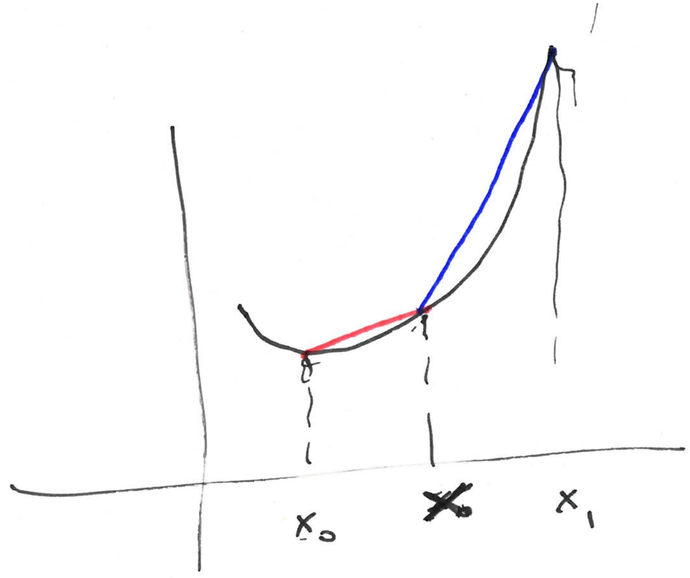
sind konvex.

② Die Summe zweier konvexer Funktionen ist konvex.

Lemma. $f : I \to \mathbb{R}$

f ist ~~konvex~~ genau dann konvex, falls für alle $x_0 < x < x_1$ in I

$$\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\substack{\text{Steigung der Sekante zwischen} \\ (x_0, f(x_0)) \text{ und } (x, f(x))}} \le \underbrace{\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}}_{\substack{\text{S. der Sekante z.w.s} \\ (x, f(x)) \\ (x_1, f(x_1))}}.$$



Beweis. Gegeben $x_0 < x < x_1$

- Es gibt $\lambda \in \mathbb{R}$ so dass

$$x = (1-\lambda)\, x_0 + \lambda\, x_1$$

mit $\lambda = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$.

Dann ist

$$f(x) \le (1-\lambda) f(x_0) + \lambda f(x_1)$$

äquivalent zu.

$$f(x) \le \underbrace{\left(\frac{x_1-x}{x_1-x_0}\right)}_{1-\lambda} f(x_0) + \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right) f(x_1)$$

Diese ist äquivalent zu

$$(x_1-x_0) f(x) \le (x_1-x) f(x_0) + (x-x_0) f(x_1).$$

$$x_1 - x_0 = x_1 - x + x - x_0$$

ist äquivalent zu.

$$(x_1-x)\big(f(x)-f(x_0)\big) \le (x-x_0)\big(f(x_1)-f(x)\big)$$

$$\iff \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}.$$

$\square$.

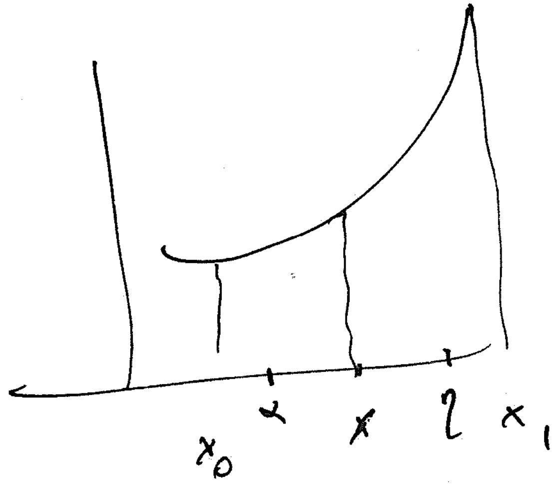
Satz: $f: \,]a,b[\, \to \mathbb{R}$ diff. Die Funktion f ist genau dann (streng) konvex falls f' (streng) mon. wachsend ist.

d.h $\boxed{f \text{ konvex} \iff f' \nearrow}$

Beweis f konvex $\Rightarrow f' \nearrow$

Übung.

Beweis ① $f' \nearrow \overset{?}{\Longrightarrow} f$ konvex.



Seien $x_0 < x < x_1$

Dann gibt es nach M.W.S.

$\alpha \in]x_0, x[$ und $\eta \in]x, x_1[$

mit

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\alpha)$$

und $$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(\eta)$$

Da $\alpha \in]x_0, x[$, $\eta \in]x, x_1[$

$\alpha < \eta$.

$$\alpha < \eta \underset{f' \nearrow}{\Longrightarrow} f'(\alpha) < f'(\eta)$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(\alpha)} \leq \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}}_{f'(\eta)}$$

$\underset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow}$ f ist konvex.

Satz f konvex

$$\Longleftrightarrow f' \nearrow$$

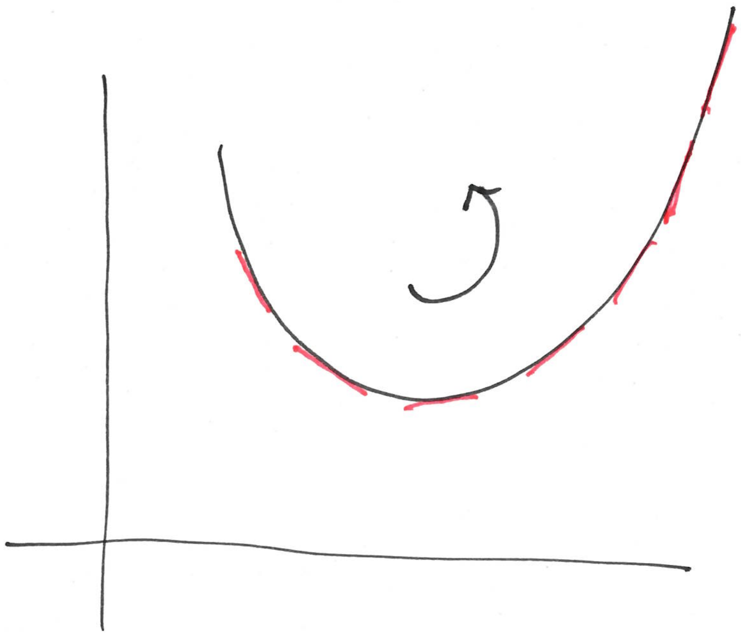
Defn. Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$. Falls f in $]a,b[$ diff ist und ihre Ableitung Funktion f' wiederum in $]a,b[$ diff ist, bezeichnet f'' oder $f^{(2)}$ die Funktion $(f')'$. Die Funktion f'' nennt sich zweite Ableitung von f

Kor Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ zweimal diff in $]a,b[$. Falls $f'' \geq 0$ $(f'' > 0)$ ist, dann ist f (streng) konvex.

d.h

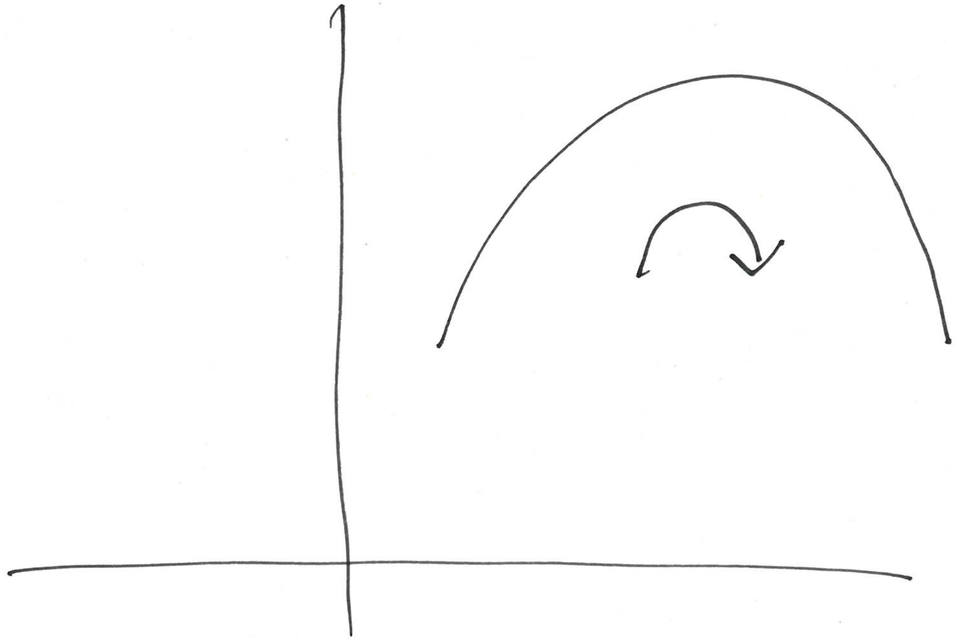
$$f'' \geq 0 \Longrightarrow f \text{ konvex}$$

konvex



- linkskrümmung
- Die Tangente dreht sich im Positiven Sinn .
- Die Steigung der Tangente nimmt zu
- f' mon. wachsend.
- $f'' > 0$

konkav.

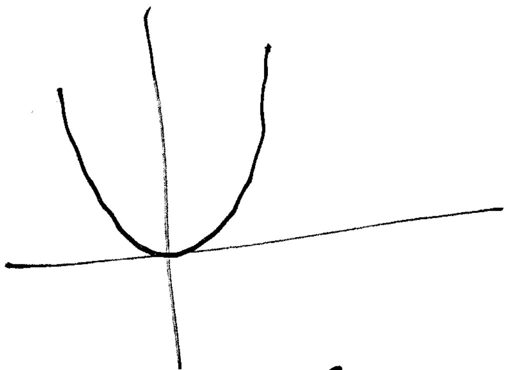


- rechtskrümmung
- Die Steigung der Tangente nimmt ab.
- f' mon. fallend
- $f'' < 0$.

Bsp. ⓪ $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

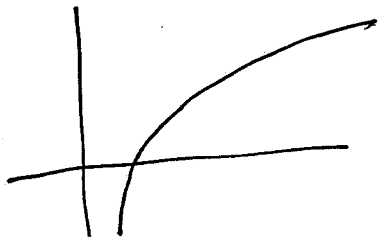
$f''(x) = 2 > 0$



① $f(x) = \ln x$

$f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2 < 0$

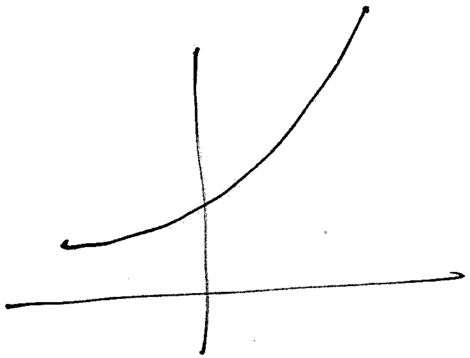
$\Rightarrow \ln x$ ist konkav.



② $e^x = f(x)$

$f' = e^x$, $f'' = e^x > 0$

$f(x) = e^x$ ist konvex



Defn. Sei $f: D \to \mathbb{R}$ diff in D und f' Ihre Ableitung.

1) Für $n \geq 2$ ist f n-mal diff. in D, falls $f^{(n-1)}$ in D diff. ist, und nennt sich

die n-te Ableitung von f.

2) Die Funktion f ist <u>n-mal stetig Diff.</u> in D, falls sie <u>n-mal Diff.</u> ist und falls <u>$f^{(n)}$ stetig</u> ist.

3) Die Funktion f ist in D <u>glatt</u> (smooth) falls sie $\forall n \geq 1$ n-mal diff ist.

<u>Bsp.</u> $\exp(x)$, $\cos x$, $\sin x$ Polynome sind glatt Funktionen.

<u>Bmk.</u> f diff $\Rightarrow f$ stetig ~~Für~~ eine n-mal diff. Funktion, ist $(n-1)$-mal stetig differenzierbar.

<u>Satz</u> Sei f, g n-mal diff. bar. Dann

1) $f+g$ ist n-mal diff.

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

2) $f \cdot g$ ist n-mal diff.

$$(f \cdot g)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Analog gilt für quotienten und Verknüpfung von Funktionen.

Bmk (Clicker Frage).

f 2.mal diff.
streng konvex

$\not\Longrightarrow f'' > 0$

e.g. $f(x) = x^4$

$f'' = 12x^2$

$f''(0) = 0.$

aber $x^4 = f(x)$ ist streng konvex.

Falls f 2-mal diff ist, dann
f (streng) konvex

$\Longrightarrow f'' \geq 0.$

§ 4.4. Potenzreihen und Taylor Approximation.

Wir haben schon gesehen dass sich jede differenzierbare Funktion durch ein Polynom vom Grad 1 annähern lässt. Nämlich die Tangente.

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T(x)}$$

Tangente.

Wir werden zeigen dass sich jede hinreichende differenzierbare Funktion durch Polynome annähern lässt.

Sei f $(n+1)$ mal diff

Dann werden wir zeigen dass

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Wir haben gleichmässig konvergenz der Folgen von Funk. früher studiert.

Sei (f_n) ein Folge von Funk. $f_n : D \to \mathbb{R}$

$f_n \xrightarrow[\text{gleichm.}]{} f$ falls

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Auch gesehen

$$\left.\begin{array}{l} f_n \text{ stetige Funk.} \\ f_n \xrightarrow[\text{gleich.}]{} f \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ ist stetig.}$$

Frage Falls $f_n \to f$ gleich.

f_n diff.

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ f ist auch diff.

Ant Nein!

Bsp. $f_n(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2}$

$$f_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}.$$

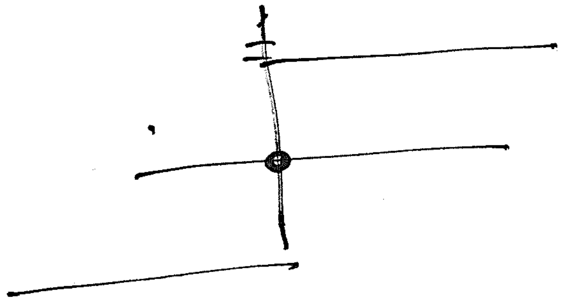
$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2}}$$

$$f_n(x) \xrightarrow[\text{gleich}]{} f(x) = |x|$$

$\downarrow$

nicht diff.

$$f_n'(x) \xrightarrow[\text{pkw}]{} g(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$



Satz. Sei (f_n) eine Folge in $C^1(]a,b[)$ = funk. 1 mal stetig diff.
$= \{f \mid f \text{ diff}, f' \text{ stetig}\}$.

mit $f_n \xrightarrow[\text{gleich.}]{} f$

und $f_n' \xrightarrow[\text{glm.}]{} g$

wobei $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$.

Dann gilt $f \in C^1(]a,b[)$

und $f' = g$.

Satz Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positiven Konvergenz Radius $\rho > 0$.

Dann ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$ auf $]x_0-\rho, x_0+\rho[$ diff. und

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, c_k (x-x_0)^{k-1}$$

$\forall x \in]x_0-\rho, x_0+\rho[$.

d.h. $f(x)$, $\forall x \in]x_0-\rho, x_0+\rho[$ ist glatt.

Kor:

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!} (x-x_0)^{k-j}$$

Insbesondere

$$c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$$

$$\boxed{\text{Bmk. Man kann Potenzreihen in ihrem Konvergenzbereich gliedweise differenzieren.}}$$

Bsp. $$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x$$

$$(e^x)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!}\right)'$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\, x^{k-1}}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$