11.5-2022

Extrema und die Ableitung

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ wächst streng monoton in der nähe von x_0

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ fällt streng monoton in der nähe von x_0

Notwendige Bedingung für Extrema

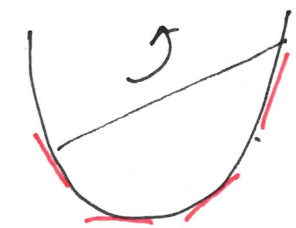
f hat an einer inneren Stelle $x_0 \in]a,b[$ ein lok. Extremum $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Krümmung: Konvex oder Konkav?

f ist (streng) konvex $\Leftrightarrow$ f' ist (streng) mon. wachsend.

f ist (streng) konkav $\Leftrightarrow$ f' ist (streng) mon. fallend.

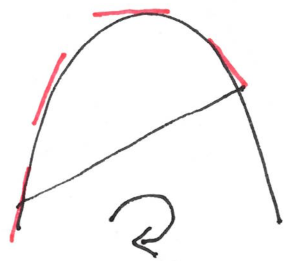
$f'' \geq 0$ $(f'' > 0)$ $\Rightarrow f$ konvex (streng).



konvex

$f'' > 0$

Die Steigung der Tangente ~~nimmt~~ zu



konkav.

$f'' < 0$

Die Steigung der Tangente nimmt ab

Satz: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$ auf $]x_0-\rho, x_0+\rho[$ differenzierbar und

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, c_k (x-x_0)^{k-1} = f'(x) \quad \forall\, x \in \,]x_0-\rho, x_0+\rho[$$

Kor Sei f wie im Satz. Dann gilt

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!} (x-x_0)^{k-j}$$

Insbesondere $c_j = \dfrac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$

Kor Die Funktionen, die durch Potenzreihen gegeben sind, sind differenzierbar in ihrem Konvergenzbereichs. Man kann solche Funktionen gliedweise differenzieren. Sie sind glatt Funktionen, (in ihrem Konvergenzbereichs)

Bsp. 1) $(\exp x)' = \exp x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
$\exp x = \sum \frac{x^k}{k!}$

2) $f(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}}, \quad |x| < 1$

$f'(x) = \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} k\, x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}, \quad |x| < 1$

Clicker Frage welche Funktion stellt die folgende Potenzreihe dar?

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n)!} = x^2 \cos(x^2)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{2n}}{(2n)!} = x^2 \cos(x^2).$$

<u>Ausgangsfrage:</u> Wie kann man $f(x)$ in der Nähe von x_0 approximieren?

<u>1. Antwort</u>. Ist f in x_0 diff., so gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Tangente}} + \underbrace{R_1(f, x, x_0)}_{\text{Restglied}}$$

Tangente ist eine gute Approx da

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(f, x, x_0)}{x - x_0} = 0 .$$

$$T_1(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ist ein Poly von Grad 1

"Taylor Polynom von Grad 1".

<u>Frage</u>: Gibt es ein Poly vom Grad 2?

<u>2. Ant</u> Ist f in x_0 2.mal diff. in einer Umgebung von x_0

Dann

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + R_2(f, x, x_0)$$

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

Poly vom Grad 2 heisst das Taylor Poly. vom Grad 2.

wir möchten dass

$$\frac{R_2(f, x, x_0)}{(x - x_0)^2} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

$$R_2(f; x, x_0) = f(x) - T_2(x).$$

Im Allg.

Satz 4.4.5 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $]a,b[$ und $n+1$ mal differenzierbar. Für $\forall x$, $a < x < b$, $\exists\, \xi \in\,]a, x[$

mit

$$f(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}} + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}}$$

$T_n(f,x,a)$ Taylor Poly vom Grad n.

$R_n(f,x,a)$.

<u>Bmk</u>: $\frac{R_n(f,x,a)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!\,(x-a)^n}$

$$= \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)$$

Dann als $x \to a$ strebt, strebt $\frac{R_n}{(x-a)^n} \to 0$.

<u>Kor</u> (<u>Taylor Approximation</u>).

Sei $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig in $]c,d[$ $(n+1)$ mal diff.

Sei $c<a<d$. Für alle $x \in [c,d]$ gibt es ξ zwischen x und a ($\xi \in]x,a[$, oder $\xi \in]a,x[$)

so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

a = Entwicklungspunkt.

Bsp. $f(x) = e^x$, $a = 0$

$f(0) = 1$

$f'(0) = 1$

$f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = 1$.

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \frac{x^n}{n!}$$

$$+ R_n(x, 0)$$

Wir können auch die Fehler abschätzen z.B $\forall x$

$0 \le x < 1$

$$|R_n(x,0)| = \left| \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \le \frac{e \cdot 1}{(n+1)!}$$

$\xi \in (0, x)$ $\le 3/(n+1)!$

Bmk. Im Allg.

Die Fehler kann man abschätzen

$$|R_n(f, x, a)| \le \sup_{a<c<x} \left| \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

Bsp.

z.B. $x = \frac{1}{2}$, $n = 5$

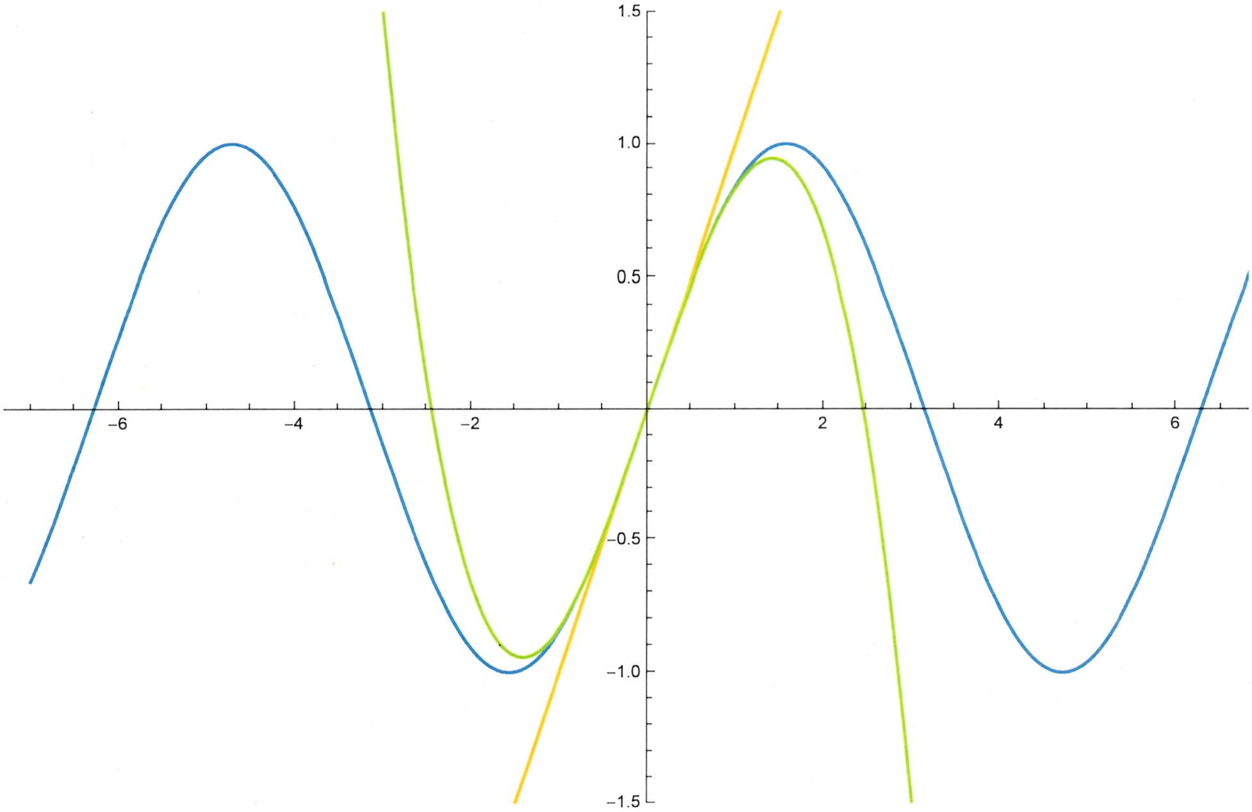
$$\sqrt{e} \cong 1 + \frac{1}{2} + \frac{1/4}{2!} + \frac{1/8}{3!} + \dots + \frac{(1/2)^5}{5!}$$

$|\text{Fehler}| < 3/6!$

Bsp:

```
In[3]:= Plot[{Sin[x], x, x - x^3 / 6}, {x, -7, 7}, PlotRange → {-1.5, 1.5}]
```

Out[3]=



$$f(x) = \sin x$$

$$T_1(x) = T_2(x) = x$$

$$T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

Taylor Reihen

Sei $f \in C^\infty$ = glatt

Die Taylorreihe der Funktion $f(x)$ mit Entwicklungspunkt x_0 ist die Potenzreihe

$$T_\infty(x; x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Bsp: 1) e^x ist glatt

Die Taylor Reihe ~~x~~ für

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Bmk. ① Die Taylor Reihe einer C^∞ Funktion f ist im Allg. nicht konvergiert.

Sie ist ein Potenzreihe mit Konvergenzradius ρ

ρ kann 0 sein

∞ sein

endlich sein.

$$\frac{1}{1-x} = \sum x^n \quad , |x| < 1$$

(2) Falls die Taylorreihe konvergiert, so konvergiert $T_\infty(x, x_0)$ nicht notwendigerweise gegen f.

Sei $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

f ist in 0 auch unendlich vielmal diff. und $f^{(k)}(0) = 0$ $\forall k$.

$T_\infty(f, 0) \equiv 0$.

konvergiert

konvergiert gegen 0

So es kann nicht $f(x)$ sein!

Bsp. $\ln(1+x) \underset{\text{Übung.}}{\overset{\downarrow}{=}} \sum (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$,

$|x| \leq 1$.

$\ln(1+1) = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Harmonische reihe $= \ln 2$.

Bsp.: $p(x) = x^3 + x + 1$

$x_0 = 1$. $\quad B = \{1, x, x^2, x^3\}$

$$= p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{p''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{p'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$= 3 + 4(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3.$$

$B' = \{(x-1)^k \mid k = 0, 3\}$

$$[p(x)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad [p(x)]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Extreme und die Ableitung.

f ist diff.

f hat in x_0 ein Extreme

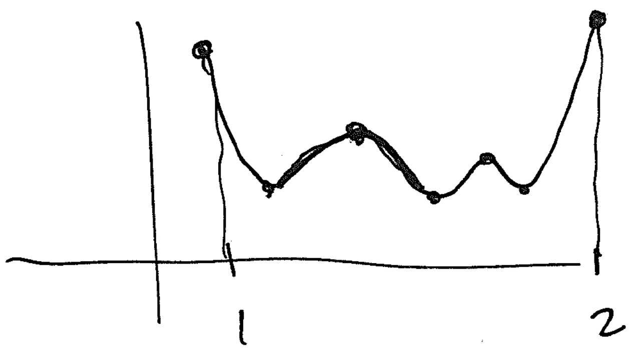
$$\Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Auf der Suche nach Extrema einer Stetigen Funktion auf einem abgesch. Intervall $[a, b]$:

(1) Bestimme alle kritische Punkte für f in $]a,b[$

d.h die Stellen x_0 mit $f'(x_0)=0$ oder f nicht diff ist.

(2) Vergleiche die Werte von f an jeder kritische Stelle und a und b.



Wir haben auch gesehen dass

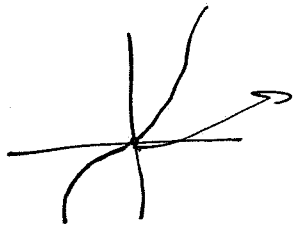
Falls $f''>0 \Rightarrow f$ konvex

$f''<0 \Rightarrow f$ konkav.

Es kann sein dass $f'(x_0)=0$ aber x_0 kein Extrema.

z.B. $f(x)=x^3$

$f'=3x^2 \qquad f'(0)=0.$

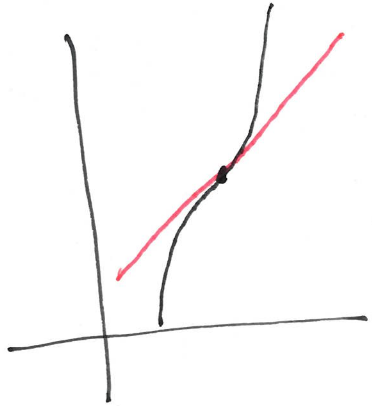


Sattelpunkt.

Defn 1) Ein Sattelpunkt (oder Horizontal Wendepunkt) ist ein Graphenpunkt $(x_0, f(x_0))$ wo $f'(x_0)=0$ aber kein lok. Extremum ist.

2) Ein Wendepunkt ist ein Graphenpunkt wo der Drehsinn der Tangente sich ändert. In einem Wendepunkt $f''(x_0)=0$.

(Aber $f'(x_0)$ muss nicht 0 sein



Wendepunkt

$f''(x_0)=0$

$f'(x_0)\neq 0.$

Sattelpunkt

$f''(x_0)=0$

$f'(x_0)=0.$

Kor. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 2-mal stetig diff. in $]a,b[$. Sei $a<x_0<b$. Wir nehmen an $f'(x_0)=0$.

1) Falls $f''(x_0) > 0$ ist, ist x_0 strikte lok. min.

2) Falls $f''(x_0) < 0$ ist, ist x_0 lok. max.

Beweis. ① Da f'' stetig ist und $f''(x_0) > 0$ ist folgt dass $\exists\, \delta > 0$ s.d.

$$f''(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$$

Aus der Taylor app. folgt dass für $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ ein $\xi \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ so dass

$$f(x) = \overbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}^{T_1} + \underbrace{\overbrace{\frac{f''(\xi)}{2!}}^{>0}\underbrace{(x-x_0)^2}_{>0}}_{R_1}.$$

$$f(x) = f(x_0) + 0\,(x-x_0)$$

+ positive.

$$\Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

$\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$.

$\Rightarrow$ x_0 ist lok. min.

Was passiert im Fall
$f'(x_0)=0$ und
$f''(x_0)=0$

2 möglichkeiten

① z.B $f(x)=x^3$

$f(0)=0$ $f'(0)=0$

$f''(0)=0$.

$f'''(0)=6\neq 0$.

0 ist Sattelpunkt kein ext.

② z.B $f(x)=x^4$

$f(0)=0$
$f'(0)=0$
$f''(0)=0$
$f'''(0)=0$

$f^{(4)}(0)\neq 0$
>0.

0 ist lok. min.

<u>Satz.</u> Sei $n\geq 0$, $a<x_0<b$
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ in $]a,b[$
$(n+1)$-mal stetig diff.

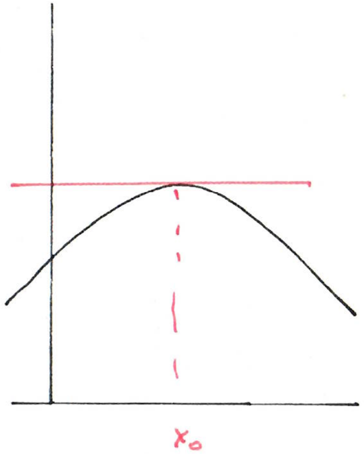
Wir nehmen an

$$f'(x_0)=f''(x_0)$$
$$=\ldots=f^{(n)}(x_0)=0$$

1) Falls n gerade ist und x_0 lok. Ext stelle folgt $f^{(n+1)}(x_0)=0$.

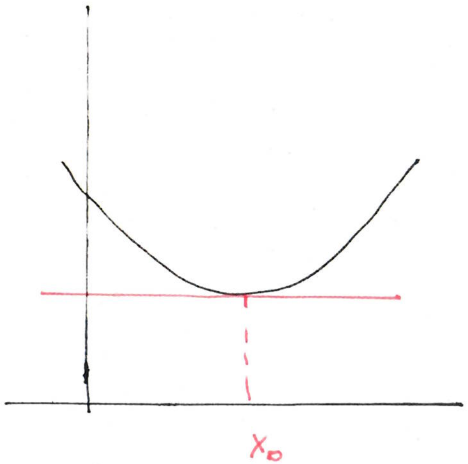
2) Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0)>0$, so ist x_0 ein str. lok. min

3) Falls n ungerade und $f^{n+1}(x_0)<0$ ist, so ist x_0 ein strikt lok. max



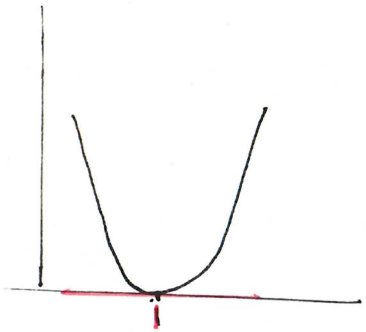
$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0$

lok. max



$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0$

lok. min



$f=(x-1)^4$

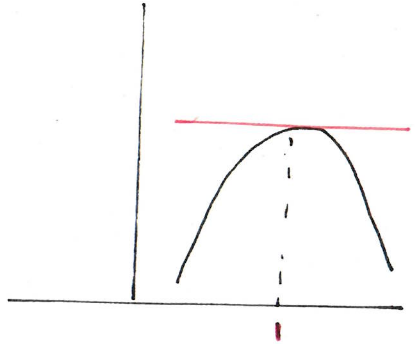
$f'(1)=0$

$f''(1)=0$

$f^{(3)}(1)=0$

$f^{(4)}(1)>0$

lok. min



$f=-(x-1)^4+4$

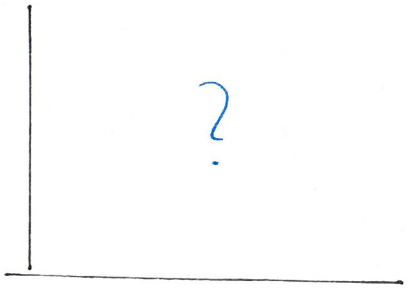
$f'(1)=0$

$f''(1)=0$

$f^{(3)}(1)=0$

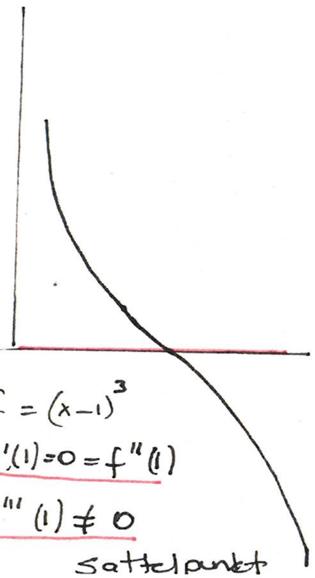
$f^{(4)}(1)<0$.

lok. max



$f'(x_0)=f''(x_0)=0$

?

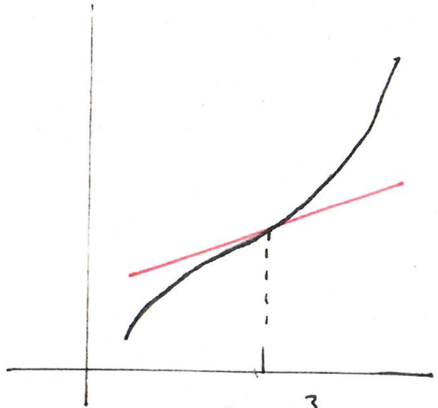


$f=(x-1)^3$

$f'(1)=0=f''(1)$

$f'''(1)\neq 0$

Sattelpunkt



$f=(x-1)^3+x$

$f'(1)=1\neq 0$

$f''(1)=0$

wendepunkt

Bsp. $f(x) = x^4 - x^3$

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2$
$= x^2(4x-3)$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=3/4 \end{array}\right\}$ Kritische Stelle.

$f''(x) = 12x^2 - 6x$
$6x(2x-1) \Rightarrow$
$x=0$, $x=\frac{1}{2}$
Wendepunkte.

$f'(0)=0$, $f''(0)=0$
$\Rightarrow$ 0 ist kein ext. stelle.

$f'''(0) = -6 \neq 0 \Rightarrow$ 0 ist ein Sattelpunkt.

$f'\left(\frac{3}{4}\right) = 0$ $\Rightarrow \frac{3}{4}$ lok. min.

$f''\left(\frac{3}{4}\right) \neq 0 > 0$

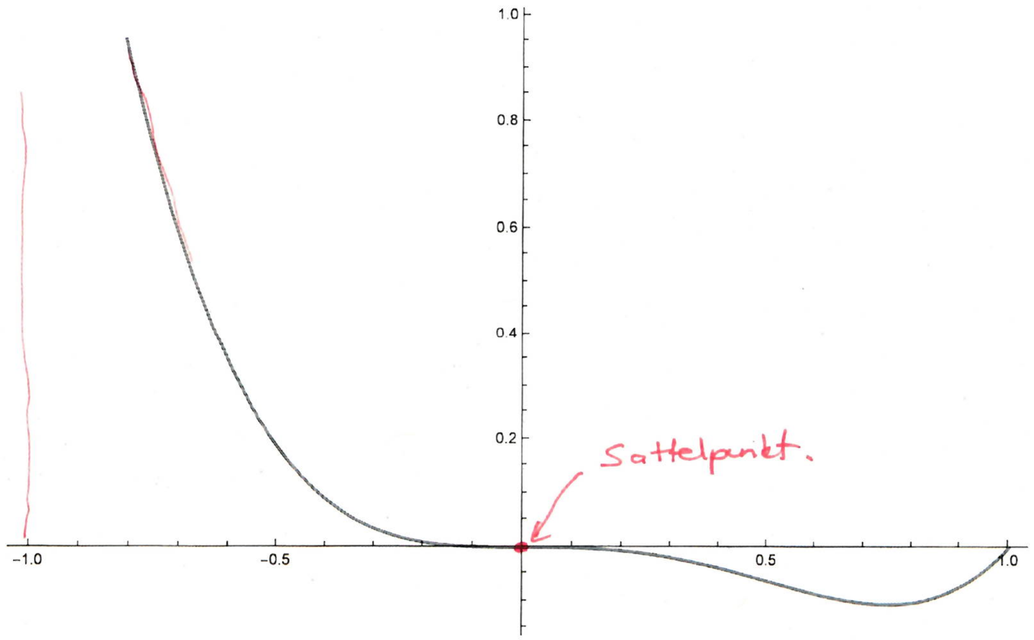
$f'\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}$ ist ein Wendepunkt.

x		0		$\frac{1}{2}$		$3/4$	
f'	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
	$\searrow$ $\cup$		$\searrow$ $\cap$		$\searrow$ $\cup$		$\nearrow$ $\cup$

```
In[2]:= Plot[x^4 - x^3, {x, -1, 1}]
```

Out[2]=




```
In[5]:= Plot[x^4 - x^3, {x, 0, 1.2}]
```

Out[5]=