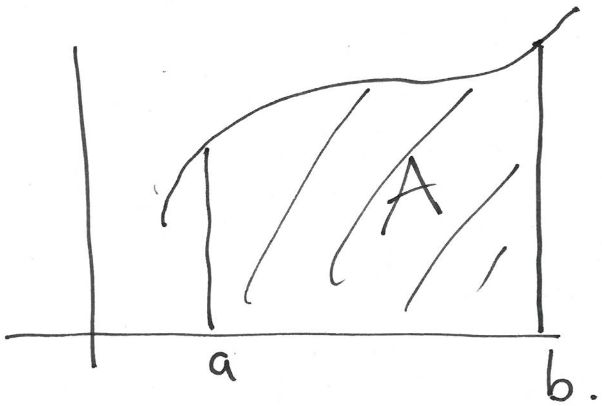
Kapitel 5

Das Riemann Integral

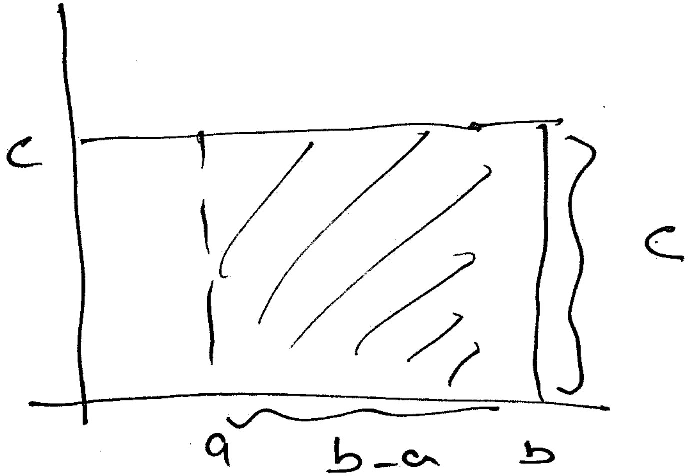
Motivation:

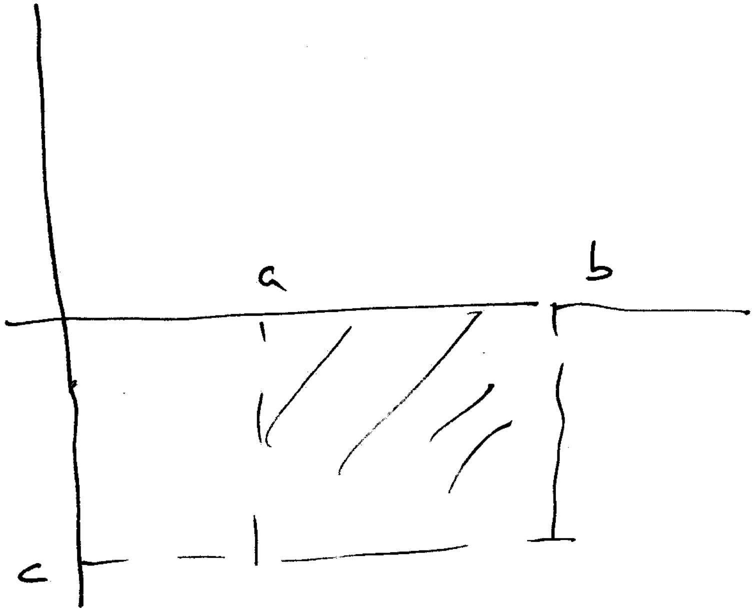
$f : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$



Gesucht: ist eine definition des Flächeninhalts A des Gebiets zwischen der x-Achse und dem Graph von f.

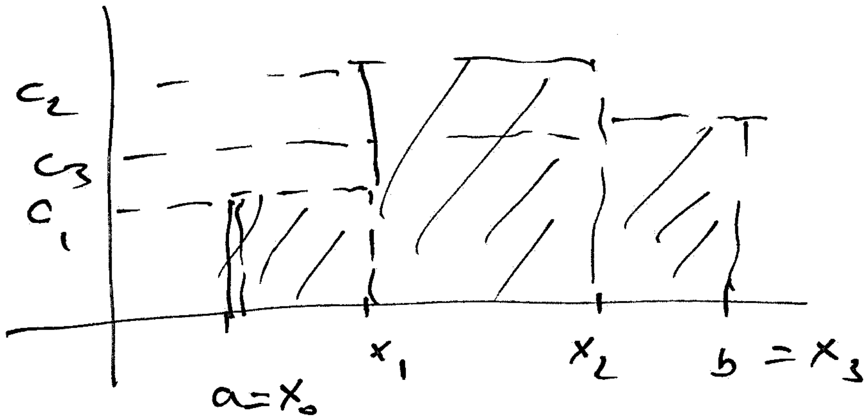
Falls f überall den konstanten Wert $c = f(x)$ hat für eine feste Zahl c, dann in diesem Fall ist die Fläche $c \cdot (b-a)$





$c(b-a)$ ist negativ.

Eine einfache Formel ergibt sich auch für eine Funktion, die sich aus konstante Funktionen auf endlich viele Teilintervallen von $[a,b]$ zusammen lässt.



$$A = (x_1 - x_0)\,c_1 + (x_2 - x_1)\,c_2 + (x_3 - x_2)\,c_3$$

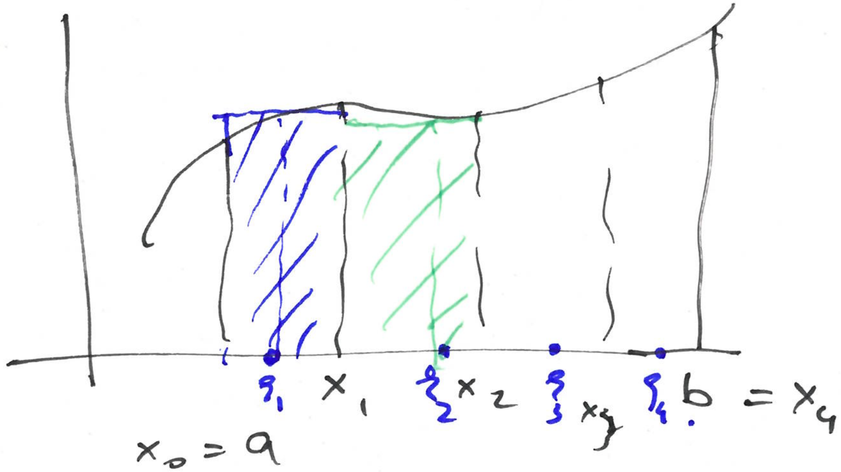
Solche Funktionen heissen Treppenfunktionen.

$$f = \sum c_k \chi_{I_k}$$

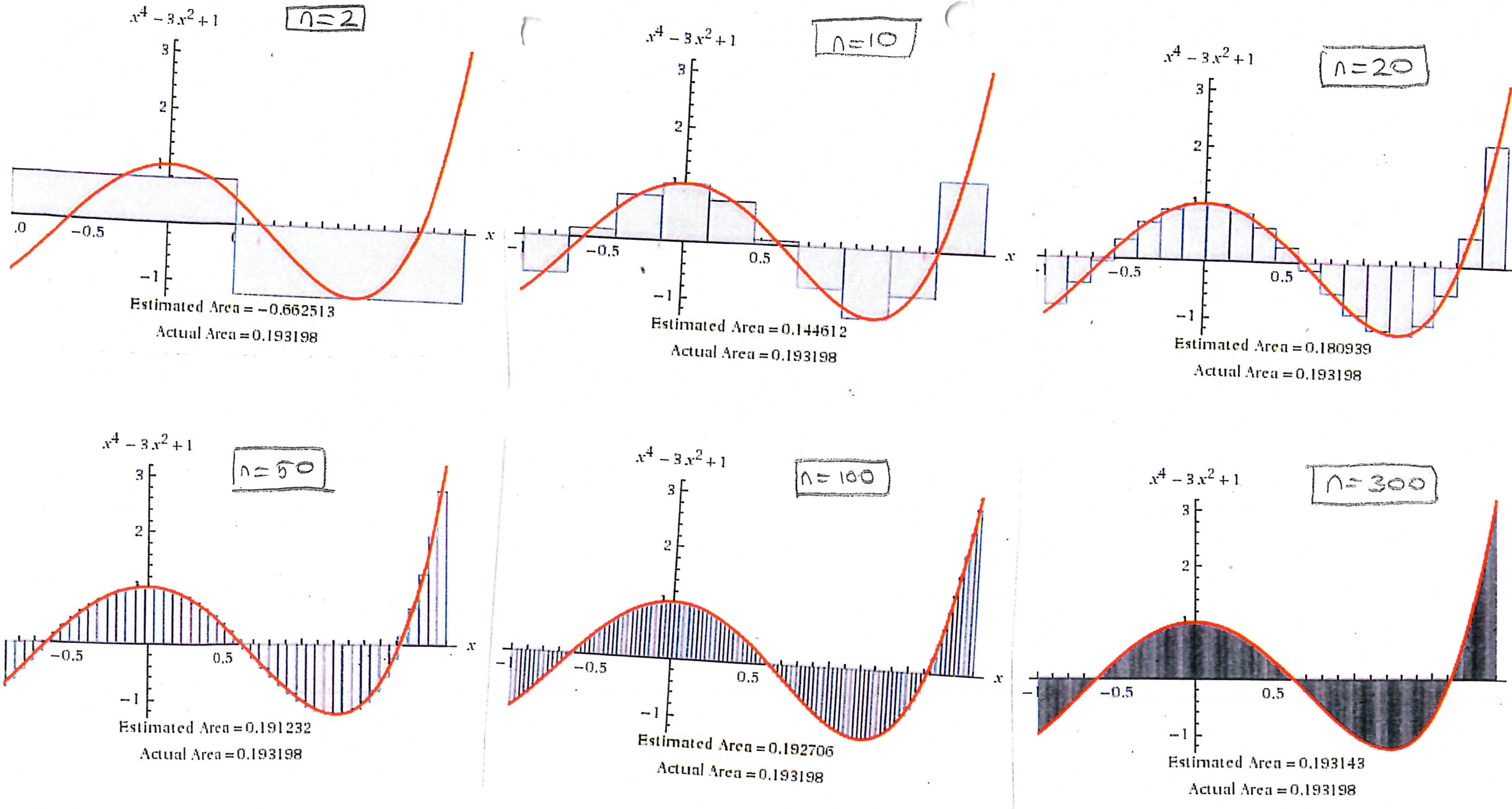
$$I_k = [x_{k-1}, x_k]$$

$$\chi_{I_k} = \begin{cases} 1 & x \in I_k \\ 0 & x \notin I_k. \end{cases}$$

Für eine beschränkte Funktion kann man wie folgt vorgehen.



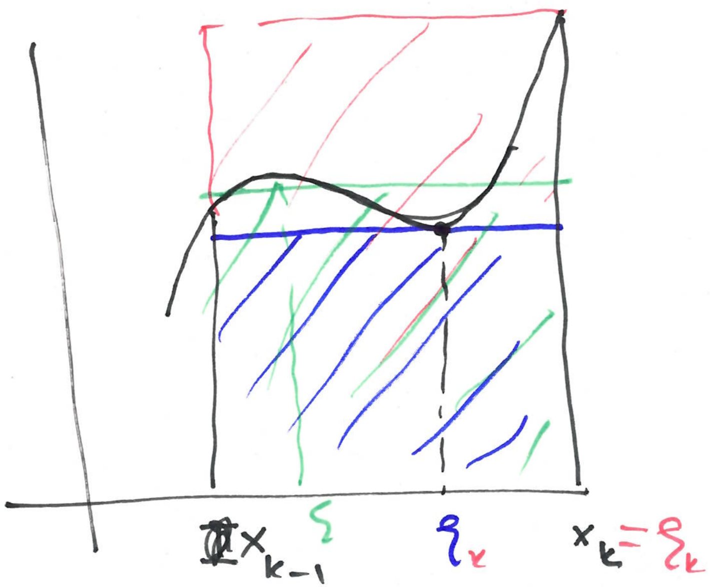
zerlege das Intervall $[a,b]$ in kleine Teilintervalle $I_1, I_2, \ldots I_n$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, wähle in jedem Intervall I_k einen Punkt ξ_k aus.



Generated using Wolfram Math World

Riemann Sum

z.B kann man ξ_k so wählen dass $f(\xi_k)$ max oder min von f in I_k sind.



Gegeben: $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

(2). Gesucht: ist eine "Stammfunktion" (primitive)

$$F: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

so dass

$$F'(x) = f(x).$$

__Defn.__ $F \in C^1[a,b]$ heisst Stammfunktion von f falls gilt

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

z.B. 1) $f(x) = x$

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

erfüllt $F'(x) = f(x)$

2) $f(x) = \sin x$

$F(x) = -\cos x$.

Coming attraction

Zusammenhang zwischen

(1) und (Σ).

§ 5.1 Definition und Integrabilitäts kriterien.

Sei $I = [a, b]$

Defn. (1) Eine Partition (Zerlegung, Einteilung, Unterteilung) eines Intervalls $I = [a, b]$ ist eine endliche Teilmenge $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots x_n = b\} \subset I$

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

wobei $\{a, b\} \subset P$

Sei $\mathcal{P}(I) := \{P \subset I \mid P$ ist endlich, $a, b \in P\}$

Wir bezeichen

$$\delta_i := x_i - x_{i-1} \quad i \geq 1$$

die Länge des

Intervalls $I_i = [x_{i-1}, x_i]$

2) Die Feinheit der Zerlegung ist definiert

$$\delta(P) := \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

3) Sei $\xi_i \in I_i$ zwischen Punkten (Stützstellen)

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

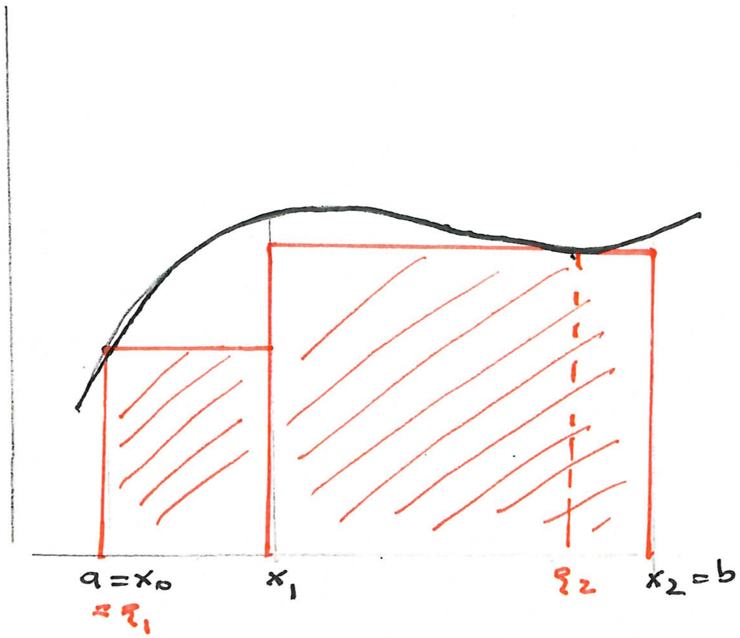
$$\xi := \{\xi_1, \dots \xi_n\}$$

4) $S(f, P, \xi)$

$$= \sum (f, P, \xi)$$

$$:= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

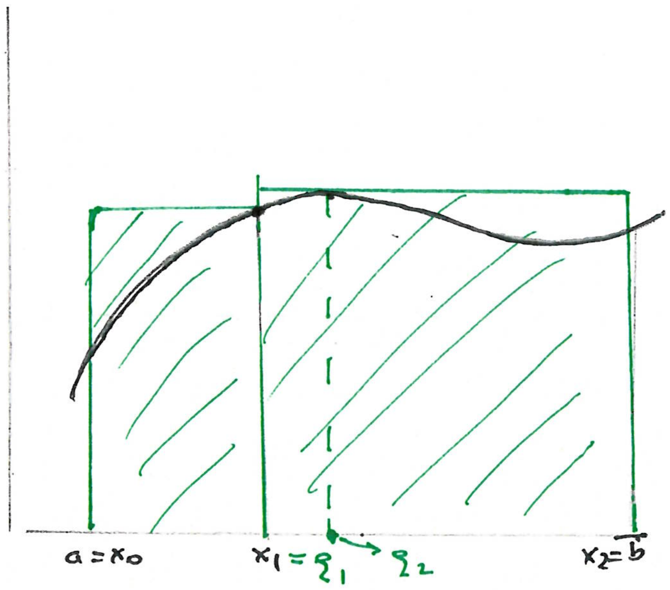
nennt man die Riemannsche Summe der Partition P und Zwischen Punkte $\xi = \{\xi_1, \dots \xi_n\}$



$$P = \{a = x_0, x_1, x_2\}$$

$$\xi_{min} = \{\xi_1 = a, \xi_2\}$$

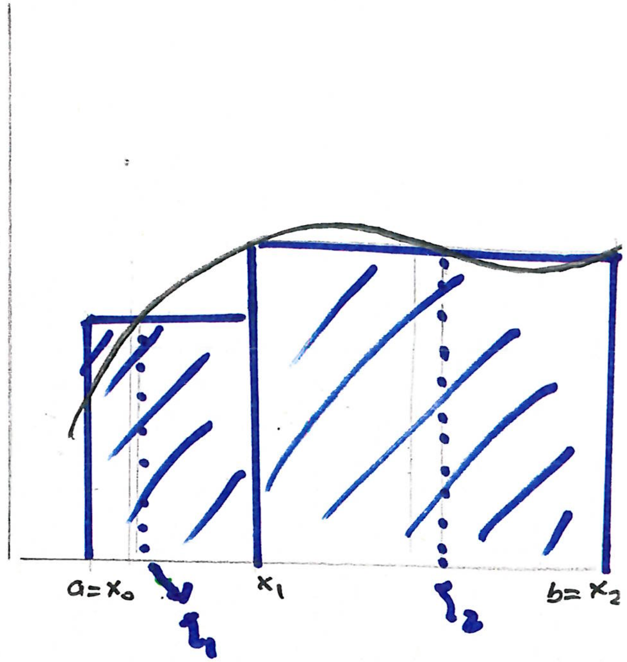
Minimum punkte



$$P = \{a = x_0, x_1, x_2 = b\}$$

$$\xi_{Max} = \{\xi_1 = x_1, \xi_2\}$$

Maximum Punkte



$$P = \{a = x_0, x_1, x_2\}$$

$$\xi = \{\xi_1, \xi_2\}.$$

$$\underline{S}(f,P) = S(f,P,\xi_{min}) \leq \underline{S(f,P,\xi)} \leq S(f,P,\xi_{Max}) = \overline{S}(f,P)$$

Defn Sei nun $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, d.h. es gibt $M \geq 0$ mit $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [a, b]$.

Wir definieren die

Untersumme

$$\boxed{\underline{S}(f, P) := \sum_{i=1}^{n} \Big(\inf_{x \in I_k} f(x)\Big)(x_i - x_{i-1})}$$

oder $\underline{U}(f, \underline{P})$

und die **Obersumme**

$$\boxed{\overline{S}(f, P) := \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{I_i} f(x)\Big)(x_i - x_{i-1})}$$

$O(f, P)$ andere Notation.

Bmk

$$-M \leq \inf_{I_i} f \leq \sup_{I_i} f \leq M.$$

$$-M(b-a) \leq \underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P) \leq M(b-a).$$

Defn: Eine Partition P' ist eine Verfeinerung von P, falls $P \subset P'$.

Vereinigung $P_1 \cup P_2$ zweier Partitionen ist wieder eine Partition.

Insbesondere haben 2 Partitionen immer einer gemeinsame Verfeinerung.

Lemma Sei $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschrankte Funktion.

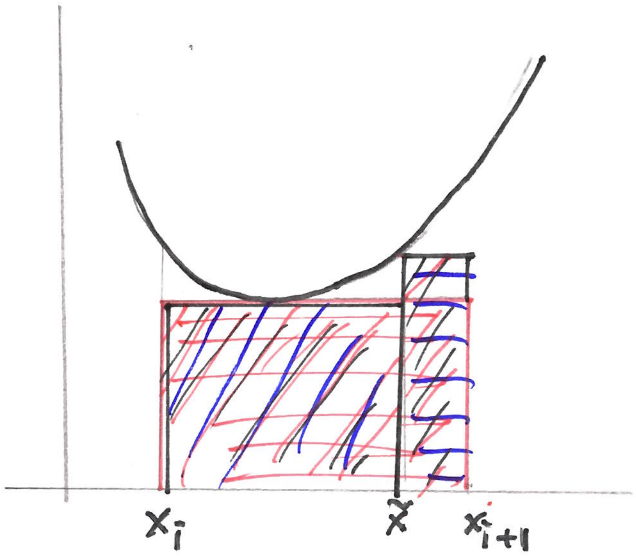
(1) Für zwei Partitionen $P, Q \in \mathcal{P}(I)$ gilt

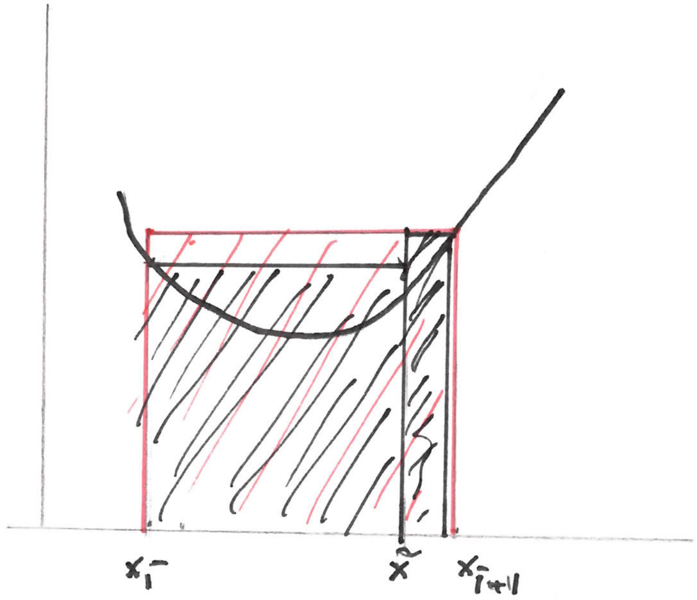
$P \subset Q$

$$\Longrightarrow$$

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P)$$

Beweis. Sei $P = \{x_0, \dots x_n\}$ Q eine Verfeinerung von P die durch hinzufügen eines Punktes $\tilde{x}$ zu P entsteht.





$P = \{x_0, \ldots x_i, x_{i+1}, \ldots x_n\}$

$Q = \{x_0 \ldots x_i, \tilde{x}, x_{i+1}, \ldots x_n\}$

$\underline{s}(f, P) \leq \underline{s}(f, Q)$

$P = \{x_0, \ldots x_i, x_{i+1}, \ldots x_n\}.$

$Q = \{x_0, \ldots x_i, \tilde{x}, x_{i+1}, \ldots x_n\}.$

$\overline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P)$

Lemma 2) Für beliebige Partitionen P, Q gilt

$$\underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,Q)$$

Insbesondere

$$\sup_{P\in\mathcal{P}(I)} \underline{S}(f,P) \leq \inf_{P\in\mathcal{P}(I)} \overline{S}(f,P).$$

Beweis: $P \cup Q$ ist eine Verfeinerung von P und Q. Aus (1) folgt

$$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,P\cup Q) \leq \overline{S}(f,P\cup Q) \leq \overline{S}(f,Q)$$

Defn.

$$\boxed{\underline{S}(f) := \sup_{P\in\mathcal{P}(I)} \underline{S}(f,P)}$$

das untere Riemann Integral von f.

$$\boxed{\overline{S}(f) := \inf_{P\in\mathcal{P}(I)} \overline{S}(f,P)}$$

das obere Riemann Integral von f.

Bmk Aus Lemma 2) gilt

$$\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$$

Defn Eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist Riemann integrierbar (Integrierbar) falls $\underline{S}(f)=\overline{S}(f)$

In diesem Fall beschreiben wir den gemeinsamen wert von $\underline{S}(f)$ und $\overline{S}(f)$ mit $\int_a^b f(x)\,dx$

Bmk Das Symbol $\int$ ist ein "stilisierte" S

S für Summe

dx ist wie $\Delta x = x_{i-1} - x_i$

$f(x)$ ist wie $f(\xi_i)$

Riemm. Summe (P, ξ)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i-1}-x_i)\right)$$

$$\downarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

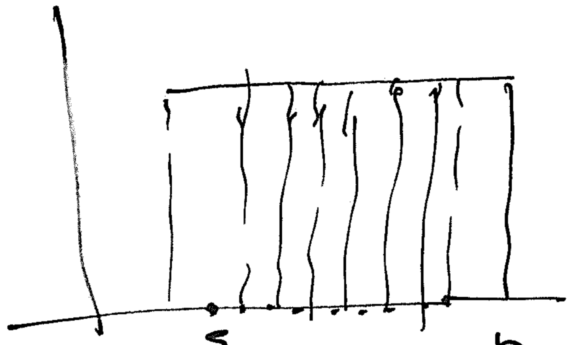
M

$f(x)$ = Integrand

x = Integrationsvariable

a = Untere Grenze

b = Obere Grenze.



<u>Bsp.</u> Sei $c \in \mathbb{R}$

$$f : I \to \mathbb{R} \quad \text{konst funk}$$
$$x \longmapsto c.$$

Dann gilt für alle $P \in \mathcal{P}(I)$

$$\underline{S}(f, P) = c(b-a)$$
$$\overline{S}(f, P) = c(b-a)$$

$$f(\xi_1) = \cdots = f(\xi_n) = c$$

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)}_{c}(x_i - x_{i-1})$$

$$= c \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})}_{(b-a)}$$

$$\underline{S}(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f, P)$$

$$= c(b-a)$$

$$\overline{S}(f) = c(b-a)$$

$$\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$$

$\Rightarrow f$ ist integrierbar.

und $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$

Bsp. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \text{ rational} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Sei $I_k \in [0,1]$ ein Teilinterval

$$\min_{I_k} f = 0.$$

$$\max_{I_k} f = 1$$

d.h. $\underline{S}(f, P) = 0$

$\overline{S}(f, P) = 1$

$\forall P \in \mathcal{P}(I)$

Also ist f <u>nicht</u> integrierbar.

Kriterien für Integrierbarkeit

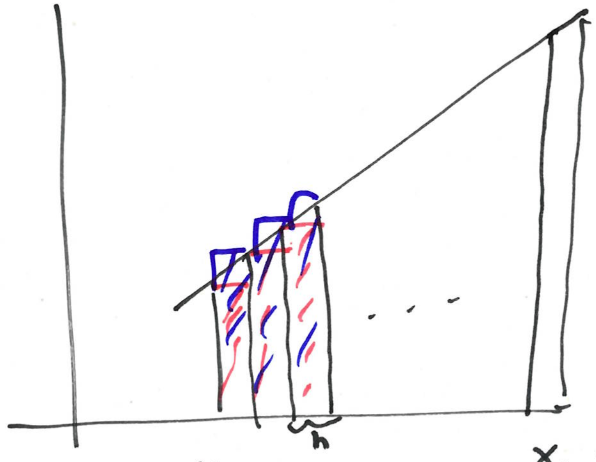
Satz 5.14. (Riemannsche Kriterium für Integrierbarkeit).

Eine beschränkte Funktion f auf $[a,b]$ ist genau integrierbar, wenn gilt

$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}(I)$ mit

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon.$$

Bsp. $f(x) = x$



Sei $P_n = \{a + ih \mid 0 \le i \le n\}$.

$h = \frac{b-a}{n}$, Uniforme Partition äquidistanten Partition.

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i$$

$$\underline{S}(f,P)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1})\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(a + \left(\frac{b-a}{n}\right)(i-1)\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[a + \left(\frac{b-a}{n}\right)(i-1)\right]$$

$$\frac{b-a}{n}\left[na + \frac{b-a}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(i-1)}_{\frac{n(n-1)}{2}}\right.$$

$$= (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\overline{S}(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \cdots\cdots =$$

$$(b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\overline{S}(f,P_n) - \underline{S}(f,P)$$

$$\frac{(b-a)^2}{2}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right) - \left(\frac{n-1}{n}\right)\right].$$

$$= \frac{(b-a)^2}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{n}.$$

Für gegebene $\varepsilon > 0$, wählen wir N so dass $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{(b-a)^2}$

Dann erhalten wir

$$\overline{S}(f, P_N) - \underline{S}(f, P_N) < \varepsilon$$

mittels Riem. kriter.

$\Rightarrow f$ ist integrierbar

~~Satz~~ Nächste Kriterium für Integrierbarkeit ~~Belegt dass~~ ergibt eine Charakterisierung des Integrals als Grenzwert und Integrierbarkeit als existenz dieser Grenzwert

Satz Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion folgende Aussagen sind äquivalent

(I) f ist integrierbar und $\int_a^b f(x)\,dx = A$

(II) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ so dass $\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I)$

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$$

Hier $\mathcal{P}_\delta(I)$ = die Menge aller Partitionen von I for welche $\delta(P) \leq \delta$.

Kor $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Folgende Aussagen sind äquivalent.

① f ist integrierbar $\int_a^b f(x)\,dx = A$

② $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ so dass für jede Partition $P \in \mathcal{P}(I)$ mit $\delta(P) < \delta$ und $\xi_1 \dots \xi_n$ zwischen Punkten

$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$

$$\Big| A - \underbrace{S(f, P, \xi)}_{= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})} \Big| < \varepsilon$$

Bmk. Dieser Satz lässt sich auch so formulieren.

Eine beschränkte Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar wenn der Grenzwert

$$\lim_{\delta(P) \to 0} S(f, P, \xi) \text{ existiert}$$

für alle P mit $\delta(P) \to 0$

und haben wir

$$\lim_{\delta(P) \to 0} S(f, P, \xi) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Bsp. Wir haben gesehen dass für $f(x) = x$

$$\overline{S}(f, P_n) = (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

P_n ist eine Folge von Partitionen mit

$$\delta(P_n) = \frac{b-a}{n} \longrightarrow 0$$

Mittel dieser Satz

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, P_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2}.$$

d.h.

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

$f(x) = x \qquad F(x) = \frac{x^2}{2}$

$F' = f$

Merken wir etwas Interessant

$$F(b) = \frac{b^2}{2}$$

$$F(a) = \frac{a^2}{2}.$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Satz Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone. Dann ist f integnerbar.

Beweis Sei f mon $\nearrow$ Sei $P_n \in \mathcal{P}(I)$ unif. Partition,

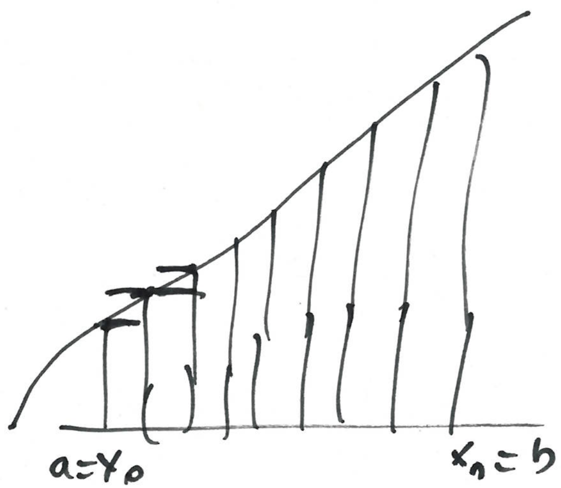
$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i$$

$i = 0, \dots, n.$

$$\overline{S}(f, P_n) - \underline{s}(f, P_n)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$- \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \left(\frac{b-a}{n}\right)$$



$$= \frac{b-a}{n} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) - f(x_i)}$$

$$\begin{aligned} &(\cancel{f(x_1)} - f(x_0)) + \\ &(f(x_2) - \cancel{f(x_1)}) + \\ &\quad \vdots \\ &(f(x_n) - f(x_{n-1})) \end{aligned}$$

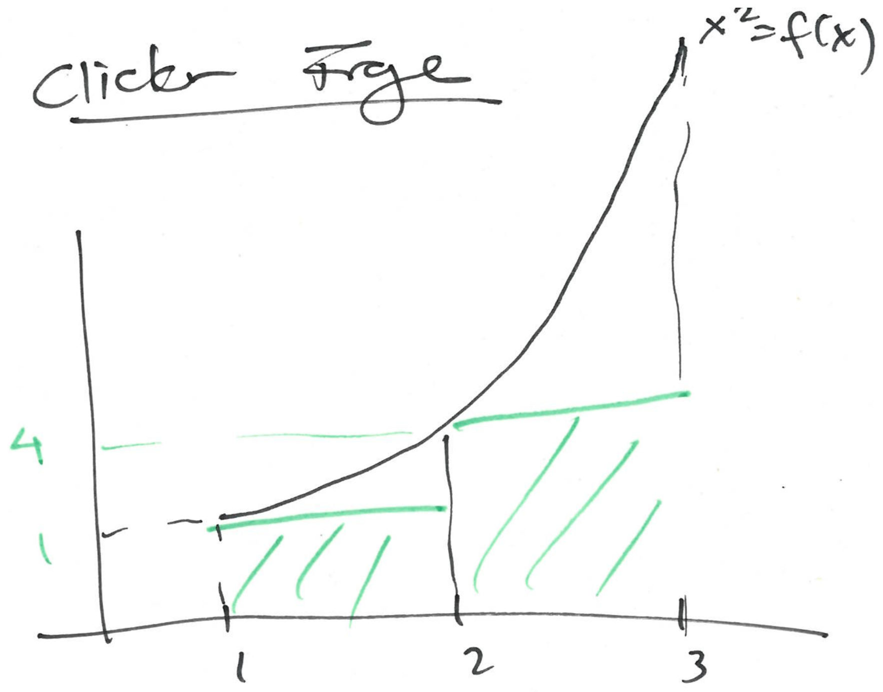
$$= \underbrace{f(x_n)}_{f(b)} - \underbrace{f(x_0)}_{f(a)}.$$

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(f(b) - f(a)\right),$$

Für jede $\varepsilon > 0$, für hinreitende gross n haben wir

$$\frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right) < \varepsilon.$$

Clicker Frage



$\underline{S}(f, P) = 1 + 4 = 5$

$1 + 4 = 5.$