I 18.5.22

- Eine Partition eines Intervalls $I=[a,b]$ ist eine endliche Teilmenge
$P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$.

- $\mathcal{P}(I):=\{P\subset I \mid P \text{ ist eine Partition von } I\}$

- die Feinheit der Partition
$$\delta(P):=\max_{1\le i\le n}\delta_i=\max(x_i-x_{i-1})$$

- Die Riemannsche Summe der Partition P und Zwischenpunkte
$\xi=\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$, $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$
$$=\boxed{S(f,P,\xi):=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\delta_i}\qquad \delta_i=x_i-x_{i-1}$$

Sei f eine beschränkte Funktion.

- Die Untersumme $=\underline{S}(f,P):=\sum_{i=1}^{n}f_i\delta_i$
wobei $f_i=\inf_{x\in I_i}f(x)$ $\quad I_i=[x_{i-1},x_i]$

- Die Obersumme $=\overline{S}(f,P):=\sum_{i=1}^{n}F_i\delta_i$
wobei $F_i=\sup_{x\in I_i}f(x)$

Für eine feste P gilt stets
$$\underline{S}(f,P)\le S(f,P,\xi)\le\overline{S}(f,P)$$

Lemma Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt
$P,Q\in\mathcal{P}(I)$

1) $P\subset Q\Rightarrow \underline{S}(f,P)\le\underline{S}(f,Q)\le\overline{S}(f,Q)\le\overline{S}(f,P)$

2) Für jede $P,Q\in\mathcal{P}(I)$ gilt
$$\underline{S}(f,P)\le\overline{S}(f,Q)$$

Defn $\underline{S}(f):=\sup_{P\in\mathcal{P}(I)}\underline{S}(f,P)$

Untere-Integral von f

$\overline{S}(f):=\inf_{P\in\mathcal{P}(I)}\overline{S}(f,P)$

Obere Integral von f

Defn $f:I\to\mathbb{R}$ beschränkt, ist Riemann-integrierbar falls
$$\boxed{\underline{S}(f)=\overline{S}(f)=:\int_a^b f(x)\,dx}$$

Kriterien für Integrierbarkeit

Satz (Riemann Kriterium)

$f : \overset{[a,b]}{\overset{\shortparallel}{I}} \to \mathbb{R}$ beschränkt, ist integrierbar

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists P \in \mathcal{P}(I)$ mit

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$$

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ so dass

$$\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I) := \{ P \in \mathcal{P}(I) \mid \delta(P) < \delta \} .$$

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$$

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0$ so dass $\forall P \in \mathcal{P}(I)$
mit $\delta(P) < \delta$ und $\xi_1, \dots \xi_n$ mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
$P = \{x_0, \dots, x_n\}$

$$|A - S(f, P, \xi)| < \varepsilon \quad (\text{ wobei } A = \int_a^b f(x)\,dx \,)$$

Bmk Falls $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar, $P_n \in \mathcal{P}(I)$ mit $\delta(P_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $\xi_i^{(n)}$ zwischen Punkten

Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f, P_{(n)}, \xi^{(n)})$$

Satz $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt, monotone
$\Longrightarrow$ f ist integrierbar

Bsp.: $f(x) = c$ und

$f(x) = x$ auf $[a, b]$

integrierbar

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \qquad \int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

- $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist nicht integrierbar.

Satz Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind

$f \pm g$, λf, fg

$|f|$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$

integrierbar

Falls $|g(x)| \geq \beta > 0$ $\forall x \in [a,b]$, so ist

f/g integrierbar

Bmk.: Sei $V := \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist eine Abb.} \}$

$(V, +, \cdot)$ ist ein ~~VR~~. Vektor Raum

Satz $\Rightarrow$

$W := \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist integrierbar} \}$

ist ein Unterraum von V.

Kor $P(x)$, $Q(x)$ Polynome sind auf $[a,b]$. Dann P, Q ~~sind~~ integrierbar.

Falls Q in $[a,b]$ keine Nullstelle hat, dann ist

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ integrierbar.

z.B. $[0,1]$ $\frac{1}{x^2+1}$ ist integr.

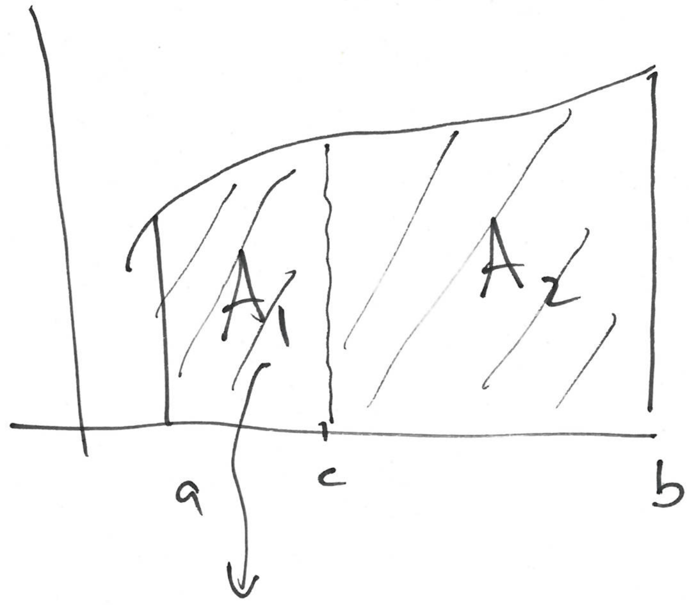
Satz Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt. $a<c<b$

Sei $f\big|_{[a,c]}$ und $f\big|_{[c,b]}$ integrierbar. Dann ist f auf $[a,b]$ integrierbar

und

$$\boxed{(*)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

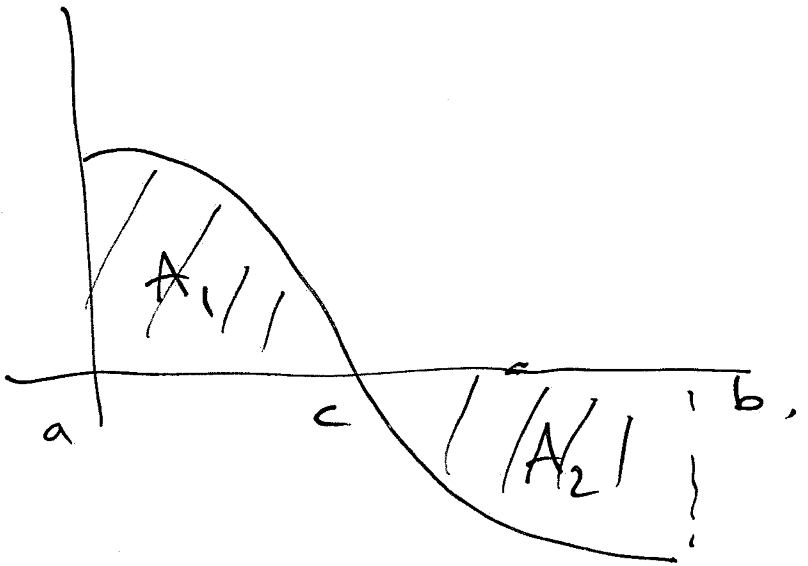
Gebietsadditivität.



$$A_1 = \int_a^c f(x)\,dx$$

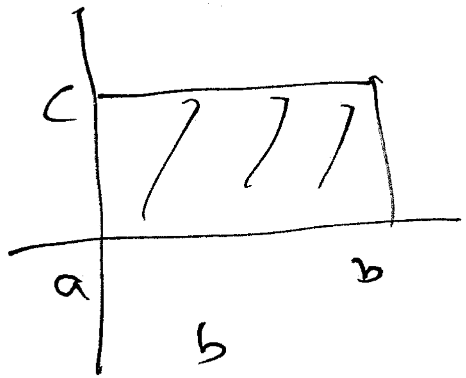
$$A_2 = \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 + A_2$$

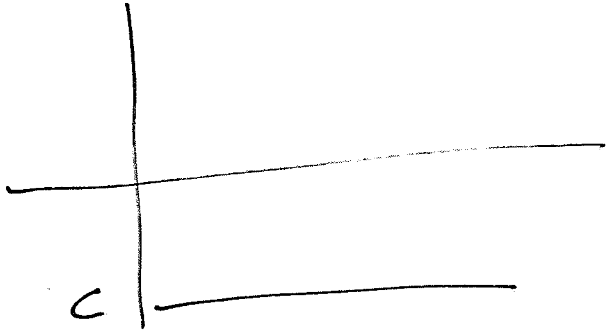


$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

$$= \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{A_1} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{-A_2}$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a) > 0$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a) < 0$$

Sei $a < b$

Nun erweitern wir die Definition von $\int_a^b f(x)\,dx$ auf

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx := 0 \qquad \int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx}$$

Mit diesen Konventionen gilt für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

(unter den entsprechenden Integrabilitätsvoraussetzungen.

Satz: Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ kompakt Intervall sowie $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha f_1 + \beta f_2$ integrierbar und

$$\int_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2)\,dx = \alpha \int_a^b f_1(x)\,dx + \beta \int_a^b f_2(x)\,dx$$

$I = [a,b]$

$W(I) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid$

f integrierbar $\}$.

Die Abbildung.

$$\phi : W(I) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto \int_a^b f(x)\,dx$$

ist linear.

Wichtige Satz

Satz: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

(beschränkt), stetig.

Dann ist f integrierbar

Beweis braucht eine stärkere Stetigkeit

Begriff: Gleichmässige Stetigkeit

f ist auf D stetig heisst

$$\forall x \in D, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_{x,\varepsilon} > 0$$

so dass $\forall y \in D$ mit

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

Defn Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$

$D \subseteq \mathbb{R}$ ist in D

gleichmässig stetig falls.

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists_{\varepsilon} \delta > 0, \ \forall x, y \in D$$

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

Satz $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

stetig. Dann ist f

in $[a,b]$ gleichmässig

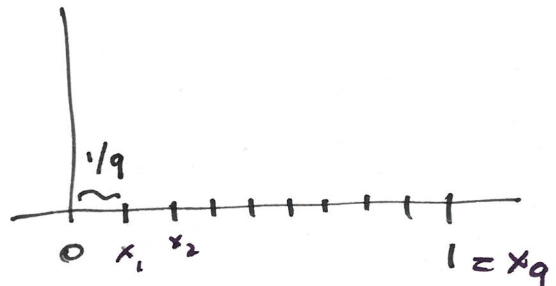
stetig.!

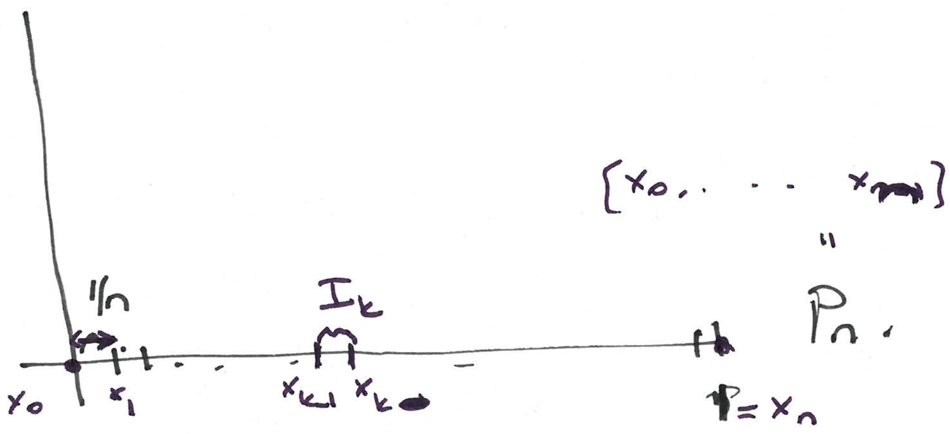
Bsp. $\int_0^1 (x^2 - x)\, dx$

Wir betrachten die

Folge von unif. Partitionen

$$P_n = \{0 = x_0, \ x_1 = \tfrac{1}{n}, \ x_2 = \tfrac{2}{n}, \dots \ x_n = 1\}.$$





Wir wählen die Rechten Endpunkte des Intervals

$I_{k-1} := \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ als

Zwischenpunkte.

$\xi_n^{(k)} := \frac{k}{n}$. $\quad k = 1, \ldots, n$.

$$S(f, P_n, \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_n^k)\,\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}.$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.} - \frac{1}{n^2}\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)}_{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n, \xi_n)$$

$n \to \infty$ heisst $\delta(P_n) \to 0$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} - \frac{n(n+1)}{2n^2}}_{\frac{2}{6} - \frac{1}{2} = -1/6.}$$

Wir werden sehen dass "oft" es eine "einfache" Methode gibt um das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ zu berechnen.

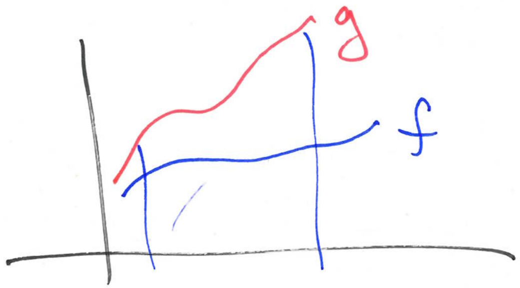
Hauptsatz der Analysis

Dafür brauchen wir einige Eigenschaften des R. Integrals.

Satz Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar und $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

Dann folgt:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$



Kor Falls $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar beschränkt

folgt

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Dreiecks Ungleichung: $|A+B| < \underbrace{|A| + |B|}$.

Betrag von die Summe

Die Summe von $|\ |$

Satz **Cauchy-Schwarz Ungleichung.**

Seien f, g zwei integrierbare Funktionen.

$$\left| \int_a^b f(x) g(x)\,dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

zur Erinnerung: C-S in $\mathbb{R}^n$.

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

Bmk. ~~...~~ f, g integrebar

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

definiert ein Skalarprodukt

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

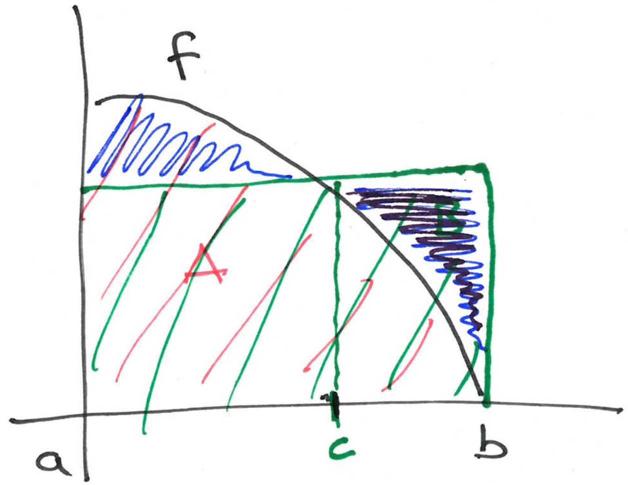
$$\shortparallel$$

$$\|f\|^2.$$

Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

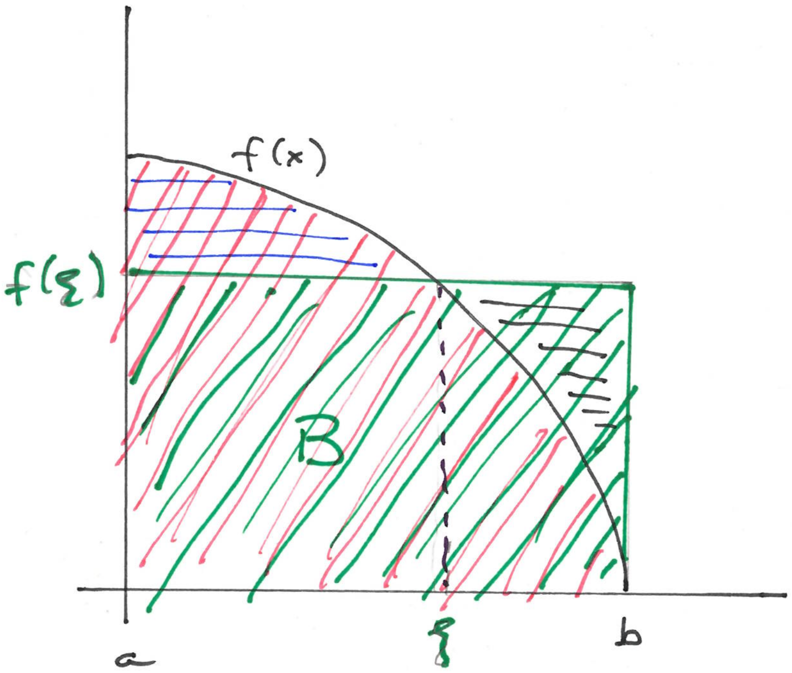
Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt $c \in [a,b]$ mit

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \doteq B$$



Satz (Cauchy) Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$, f stetig, g beschränkt integrierbar mit $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$. Dann gibt $c \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$



A = Fläche zwischen $f(x)$, der $x=a$ Achse, $x=b$ Achse und der x-Achse von a bis b.

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

$B = f(\xi)(b-a)$ = Flächeninhalt von grüne Rechteck.

Mittelwertssatz der Integral Rechnung

$\exists\ \xi \in [a,b]$ so dass.

$$A = B$$

d.h.: Fläche in B, die nicht unter dem Graph enthalten ist

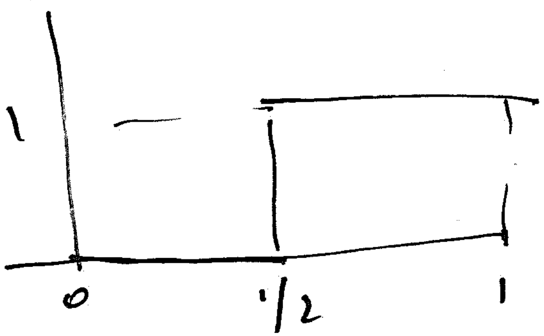
$$= f(\xi)(\xi - b) - \int_{\xi}^{b} f(x)\,dx$$ = Schwarz schraffierte Fläche

$$= \underbrace{\int_{a}^{\xi} f(x)\,dx - f(\xi)(\xi - b)}_{\text{Fläche unter dem Graph, die nicht in B enthalten ist}}$$ = Blau schraffierte Fläche.

Bmk 1) Mit $g \equiv 1$ erhalten wir Mittel W.S der Integralrechnung.

2) Die Voraussetzung dass f stetig ist, ist wichtig!

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$



Dann ist

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{1/2} 0\,dx + \int_{1/2}^1 1\,dx = \frac{1}{2}$$

Es gibt kein $c \in [0,1]$ so dass

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} = f(c)(1-0).$$

Clicker Frage

Taylor Poly von $f(x) = \ln(x+1)$

um $x_0 = 0$. (Grad 2).

$$(T_2 f)(x) = f(0) + f'(0)(x-0)$$

$$+ \frac{f''(0)}{2!} x^2$$

$$f(0) = \ln 1 = 0.$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \cdot 1 \Big|_{x=0} = 1$$

$$f''(x) = \left((x+1)^{-1}\right)'$$

$$(-1)(x+1)^{-2} \cdot 1.$$

$$-\frac{1}{(x+1)^2}\Big|_{x=0} = -1$$

$$0 + 1(x) - \frac{1}{2} x^2$$

$$= x - x^2/2.$$

Clicker Frage

$(a, f(a))$ ein kritische Punkt der Funktion f, so hat f an der Stelle $(a, f(a))$ ein Extremum.

Falsch!

$f(x) = x^3$

im $x=0$ hat ein kritische Punkt aber 0 ist kein Extrem

$x=0$ ist ein Sattelpunkt!