25.5.2022

Hauptsatz der Integral und Differechnung (HID)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \le x \le b$$

ist in $[a,b]$ stetig differenzierbar und $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

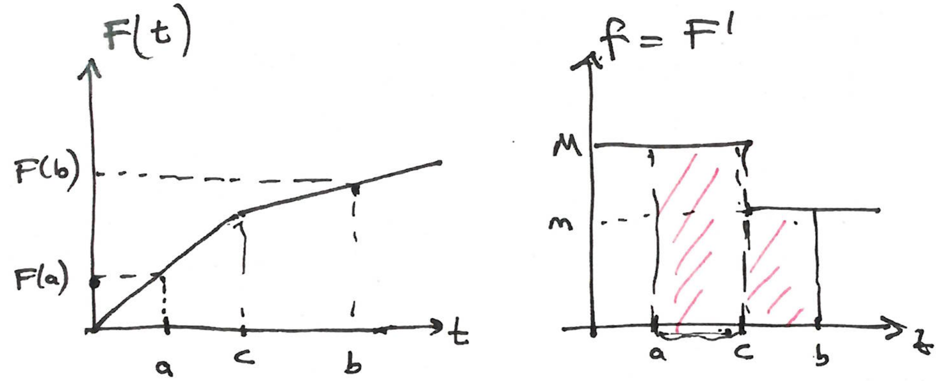
d.h $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist ein Stammfunk von f.

Satz Fundamental satz der Analysis

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion F von f, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\sum F'(x)\Delta x$$



$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt \qquad F' = f.$$

Satz Partielle Integration

Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \underbrace{f(x)g(x)\Big|_a^b}_{f(b)g(b) - f(a)g(a)} - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.}$$

Bsp $I = \int x e^x \, dx = fg - \int \underbrace{f' g}\, dx$

① $f(x) = x$

$g'(x) = e^x$

$\swarrow$ P.I

$x e^x - \underbrace{\int e^x \, dx}$

einfacher als I

② $g'(x) = x$

$f(x) = e^x$

$\downarrow$ P.I.

$\frac{x^2}{2} e^x - \underbrace{\int \frac{x^2}{2} e^x \, dx}$

nicht einfacher.

Bsp. $\int x^2 \sin x \, dx = I$

$f(x) = x^2$ $\quad$ $g'(x) = \sin x$

$f'(x) = 2x$ $\quad$ $g(x) = -\cos x$

$I \underset{P.I}{=} -x^2 \cos x + \underbrace{\int 2x \cos x \, dx}_{II}$

$II = 2 \int x \cos x \, dx$

$f(x) = x$ $\quad$ $g'(x) = \cos x$

Bsp. $\int \ln x \, dx.$

$$\int \underbrace{\ln x}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'} \, dx.$$

$f' = \frac{1}{x}$ $\quad g = x$

$$fg - \int f'g \, dx$$

$$x \ln x - \int \frac{x}{x} \, dx$$

$$x \ln x - x + C.$$

Bsp. $I = \int \underbrace{e^x}_{f} \underbrace{\cos x}_{g'} \, dx.$

$f(x) = e^x \quad g'(x) = \cos x$

$f' = e^x \quad g(x) = \sin x$

$$I = e^x \sin x - \int \underbrace{e^x}_{f} \underbrace{\sin x}_{g'} \, dx.$$

$f'(x) = e^x \quad g(x) = -\cos x \, dx.$

$$I = e^x \sin x - \left[-e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \cos x \, dx}_{I} \right]$$

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I$$

$$2I = e^x [\sin x + \cos x]$$

$$\rightarrow I = e^x (\cos x + \sin x) / 2.$$

Methode der Substitution

Umkehrung von Kettenregel.

Sei $a<b$, $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$

stetig differenzierbar

I ein Interval $\Phi([a,b]) \subset I$

und $F : I \to \mathbb{R}$ eine stetige

Funktion.

Dann nach Kettenregel.

$$\left((F \circ \phi)(t)\right)' = \underbrace{F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)}$$

Falls F ein Stammfunktion

von f, d.h $F' = f$

Dann $\underbrace{f(\phi(t))\,\phi'(t)}$

$$= (F \circ \phi)'(t)$$

d.h. $F \circ \phi$ ist ein

Stammfunktion von

$$f(\phi(t))\,\phi'(t).$$

$$\int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)$$

$$\underset{\text{Fund. satz}}{=} (F\circ\phi)(b) - F\circ\phi(a).$$

$$\underbrace{F(\phi(b)) - F(\phi(a))}$$

$$= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,dt$$

Satz (Substitution) Sei

$a < b$. $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$

stetig diff. $I \subset \mathbb{R}$

ein Intervall mit

$$\phi([a\, b]) \subset I$$

$f : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktion

Dann gilt

$$\int_a^b f(\phi(t))\, \phi'(t)\, dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\, dt.$$

Bmk. ~~F~~ Für unbestimmte Integral gilt

$$\int f(x)\, dx \Big|_{x=\phi(t)} = \int f(\phi(t))\, \phi'(t) + c.$$

Die Linken Seite ist ein Funktion von x und ist gleich der Rechten seite, ein Funktion von t vermöge der Relation $x = \phi(t)$

$$dx = \phi'(t)\, dt.$$

Bmk. Für Substitution regeln gibt es zwei Losorten

(1) Links → rechts

oder

(2) Rechts → links

(1) Falls ein Integral explizit in der Form

$$f(\phi(t))\,\phi'(t)$$ liegt,

so können wir links → rechts anwenden.

Bsp. $$\int_0^1 \underbrace{(1+t^2)^{2022}}_{(\phi(t))^{2022}} \cdot \underbrace{t\,dt}_{\frac{\phi'(t)}{2}}$$

$$1+t^2 = \phi(t) = x \qquad t=0 \Rightarrow x= \quad t=1 \Rightarrow x=$$

$$\phi'(t) = 2t\,dt = dx$$

$$f(x) = x^{2022}$$

$$\int_{0=t}^{1=t} (1+t^2)^{2022} \underbrace{t\,dt}_{\frac{1}{2}dx}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{1=x}^{2=x} x^{2022}\,dx$$

$$\frac{x^{2023}}{2\cdot 2023}\Bigg|_1^2 = \frac{2^{2022}}{2023} - \frac{1}{2\cdot 2023}.$$

$$\int (1+t^2)^{2022}\, t\, dt$$

$$c + \frac{x^{2023}}{2 \cdot 2023} = \frac{(1+t^2)^{2023}}{2 \cdot 2023} + C$$

Bmk. Wenn man bestimmte Integrale berechnet gibt es 2 methoden mit dem Integrationsgrenzen umgehen.

(1) Man substituiert $x=\phi(t)$, berechnet eine Stammfunktion und einsetzt die in x neue variable x mit der alten t und

benutzt die Grenzen für t.

$$\int_0^1 (1+t^2)^{2022}\, t\, dt = \left.\frac{(1+t^2)^{2023}}{2 \cdot 2023} + C\right|_{t=0}^{t=1}$$

oder

(2). Man ändert die Int. grenzen während der Substitution

Bsp: $\displaystyle\int_0^1 \overbrace{\frac{e^t}{\underbrace{1+e^t}_{x}}\,dt}^{dx}$

$x = 1+e^t$

$dx = e^t\,dt$

oder $\displaystyle\int_{t=0}^{t=1} \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = \int_{x=2}^{1+e} \frac{dx}{x}$

$= \ln|x| + c$

$= \ln|1+e^t| + c.$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = \ln|1+e^t|\Big|_0^1$

$= \ln|1+e| - \ln 2$

$= \ln|1+e| - \ln 2.$

$\int f(x)\,dx$

$\lim \sum_i f(x_i)\,\Delta x_i$

$\downarrow$

$\int f(x)\,dx$

$\displaystyle\int \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = \int \frac{1}{x}\,dx$

$x := 1+e^t = \phi(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \phi'(t)$

$\Delta x = \Delta\phi \approx \phi'(t)\,\Delta t$

$\displaystyle\frac{\Delta\phi}{\Delta t} \longrightarrow \phi'(t)$

$$\Delta x \approx \phi'(t)\Delta t$$

$\downarrow$

$$dx = \phi'(t)\,dt$$

$$dx = e^t\,dt$$

(2) rechts $\rightarrow$ links.

Ein Integral liegt in der Form $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

das schwer zu berechnen scheint. Wir versuchen mittels "geeigneter" Substitution $x = \phi(t)$ dieses Integral

umzuformulieren, so dass Subs.-regel anwendbar ist und die ~~neue~~ alte Integral in neuen variablen einfacher ist.

Bsp. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

$x = \sin t$ $\quad x = 0 \Rightarrow t = 0$

$dx = \cos t\,dt$ $\quad x = 1 \Rightarrow t = \pi/2$.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt$$

Um $\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt$ zu berechnen:

(1) $\int \cos^2 t \, dt$

mit $\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}$.

$$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2t}{2} \Big|_0^{\pi/2}.$$

$$= \pi/4.$$

(2) $\int \cos^2 t \, dt = \int \underbrace{\cos t}_{f} \cdot \underbrace{\cos t}_{g'} \, dt$

Partielle Integration

(3). mit Subs.

$x = \cos t$

$dx = -\sin t \, dt$

$$\int_{\pi/2}^{0} \sin t(-\sin t) dt =$$

$$-\int_{\pi/2}^{0} \sin^2 t \, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt$$

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt$$

$$2I = I + I$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt + \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}) \, dt$$

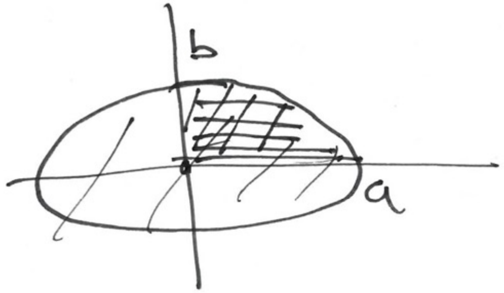
$$= \pi/2 .$$

$$\Rightarrow I = \pi/4 .$$

Bsp. Flächeninhalt einer Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow y = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = y^2 .$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(Falls $a = b$: $x^2 + y^2 = a^2$ Kreis)

Was ist die Flächeninhalt von ein Ellipse?

$$F = 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \, dx .$$

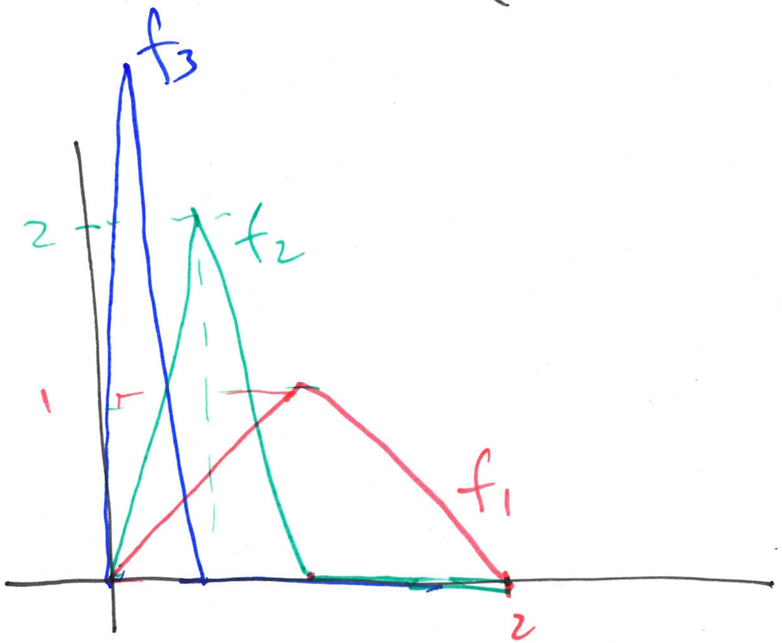
$$x = at \qquad dx = a\,dt$$

$$= 4b \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} \, a \, dt = 4ab \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1 - t^2} \, dt}_{\pi/4}$$

$$\boxed{F = \pi a b .}$$

§ 5.5 Integration konvergenter Reihen.

Bsp. $f_n(x) := \begin{cases} n^2 x & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \frac{1}{n} \leq x \leq 2/n \\ 0 & 2/n \leq x \leq 2 \end{cases}$



1) $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0,2)$

2) $\int_0^2 f_n(x)dx = 1 \quad \forall n \geq 1.$

Folgt das

$2) \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \int_0^2 f_n(x) dx$

$= \lim\limits_{n \to \infty} 1 = 1.$

$1) \Rightarrow \int_0^2 \left(\lim f_n(x)\right) dx = \int_0^2 0 \, dx = 0$

d.h. Das Interval der Grenzwert Funkt $\neq$ in Grenzwert des Integrals.

$f_n \to 0$ aber nicht
P.weise gleichmässig.

Satz Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt, integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim f_n(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Bmk: $\int$ und $\lim$ kann man umtauschen.

Kor. Sei $f_n : [a,b]$ eine Folge beschränkten Integrierbare Funkt. so dass $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf $[a,b]$ gleichmässig konvergiert. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) dx.$$

Bmk: $\int$, $\sum$ kann man umtauschen.

Kor Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

Potenzreihe mit Positiven Konvergenz Radius $\rho > 0$.

Dann ist für jedes $0 \leq r < \rho$ gilt $\forall x \in]-\rho, \rho[$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}$$

Bmk. Wir vergleichen diese mit: $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ mit pos. konv- radius ρ. Dann ist jede $0 \leq r < \rho$

f auf ~~R~~ $[-r, r]$ diff. und es gilt $\forall x \in]-\rho, \rho[$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$$

Bmk. Man kann Potenzreihen in Ihrem Konvergenzbereich termwise differenzieren und Integrieren.

Bsp: Geometrische Reihe.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

$|x| < 1$

$$= \sum (-x)^n.$$

Dann. $$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \ln|1+x|$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad |x| < 1$$

Bmk $$\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

konvergiert, alt. Harmonische Reihe.

mit ~~sehr~~ Arbeit kann man zeigen dass

$$\lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \lim_{x \to 1^-} \sum (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

$$\boxed{\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}}$$

(Siehe Skript).

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots$$

$$|x| < 1$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots$$

$$|x| < 1$$

$$\lim_{x \to 1} \arctan x = 1 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \cdots$$

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots}$$