30.5.2022

Satz Partielle Integration

Seien $a<b$ reelle Zahlen und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Bsp. $\int x e^x\,dx = xe^x - e^x + C$

$\int (\ln x) 1\,dx = x\ln x - x + C$

$\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$

Satz (Substitution). Sei $a<b$

$\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

$I \subset \mathbb{R}$ mit $\phi([a,b]) \subset I$ und

$f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx$$

2 Lesarten:

(I) links → rechts: Liegt ein Integral explizit in der Form

$$\int_a^b f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt$$

vor, so können wir die Subs. regel von links nach rechts anwenden.

Bsp. $\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = \int_2^{1+e} \frac{dx}{x} = \ln\left|\frac{1+e}{2}\right|$ $\quad x = 1+e^t$

(II) rechts → links: Ein Integral liegt der Gestalt $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ mit gewissen Grenzen α, β vor das schwer zu berechnen scheint, versucht man dann mittels geeigneter Substitution $x=\phi(t)$ dieses Integral umzuformulieren so dass subs. regel anwendbar ist wobei $\phi(a)=\alpha$ und $\phi(b)=\beta$ gelten muss.

Bsp. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, $x = \sin t$, $dx = \cos t\,dt$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{4}$$

Integration konvergenter Reihen

Satz Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten Integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt und integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Satz Sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist für jedes $0 \le r < \rho$ f auf $[-r, r]$ integrierbar und es gilt $\forall x \in]-\rho, \rho[$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Bsp. a) $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$, $|x|<1$

b) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$, $|x|<1$

Kor a) $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

b) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$

Bsp. $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$

$\int e^{-t^2}\,dt$

Wir benutzen die Potenzreihe für e^{-t^2}

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!}\right) dt$$

$$\left(e^{-u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-u)^n}{n!}\right).$$

$$= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}\right) dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n}\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^x \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \dots$$

Satz (Leibniz) Sei $a_n \geq 0$ mon. fallend $\lim a_n = 0$

Dann konv $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$

und für Summe haben wir

$a_0 - a_1 \leq S \leq a_0$

Sei $S = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \ldots$

haben wir mittels

Satz von Leibniz

$$\underbrace{a_1 - a_2}_{x - \frac{x^3}{3}} < \underset{\int_0^x e^{-t^2} dt}{S} < a_1 = x$$

Nehmen wir den Grenzwert

als $x \to 1$,

$$\lim_{x \to 1} x - \frac{x^3}{3} < \int_0^1 e^{-t^2} dt < \lim_{x \to 1} x$$

$$\frac{2}{3} < \int_0^1 e^{-t^2} dt < 1$$

Anwendung des R. Integrals

Wir haben gesehen

falls $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

integrierbar, dann

$\int_a^b f(x) dx$ ist ein Grenzwert von Rie-Summe.

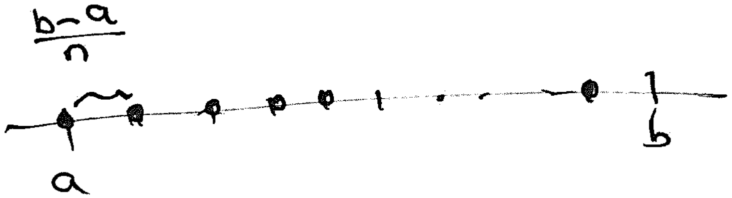
Falls $(P^{(n)})$ eine Folge von Partitionen mit

$\delta(P^n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, sei $\xi^{(n)}$

zwischen Punkten, Dann

$$\lim_{n \to \infty} S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)}) = \int_a^b f(t) dt$$

z.B $P^{(n)} := \{a, a+\frac{b-a}{n}, a+2\left(\frac{b-a}{n}\right), \dots, b\}.$



$$\xi_k^{(n)} := a + k\frac{(b-a)}{n} \qquad k=0,\dots,n-1$$

Dann

$$S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)}) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right)\frac{1}{n}$$

Bsp. Nehmen wir $f(x) = x^m$

$a = 0, \quad b = 1$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{m+1}.$$

Dann die Rie. Summe mit uniform Partition $P^{(n)}$

$$\xi_k^{(n)} = \frac{k}{n}$$

$$S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)}) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^m}{n^m}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} S\left(f, P^{(n)}, \xi^{(n)}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{m+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{m+1}} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k^m} = \frac{1}{m+1}$$

$$\left(0+1+2^m+3^m+\cdots+(n-1)^m\right)$$

$$\frac{1+2^m+3^m+\cdots(n-1)^m}{n^{m+1}} \longrightarrow \frac{1}{m+1}$$

Für genug gross n

$$\boxed{1+2^m+\cdots+(n-1)^m \approx \frac{n^{m+1}}{m+1}}$$

$$1+2+\cdots+n-1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$

$$1+2+\cdots n+1 \approx \frac{n^2}{2}.$$

$$1+2^2+\cdots+(n-1)^2 \approx \frac{n^3}{3}$$

$$1+2^2+\cdots+(n-1)^2 = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$

$$\approx \frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3}$$

Bsp. Wie gross ist $n!$?

$n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}_{\text{ein Produkt}}$

Wir können logarithmus anwenden

$\frac{1}{n}(\log n!) = \frac{1}{n}(\log 1 + \log 2 + \ldots + \log n)$

$1 = \frac{1}{n} \cdot n \qquad 2 = \frac{2}{n} \cdot n \quad \ldots$

$= \frac{1}{n}\left[\log\frac{1}{n} + \log n + \log\frac{2}{n} + \log n + \ldots + \log\frac{n}{n} + \log n\right]$

$= \frac{1}{n}\left[n \log n + \log\frac{1}{n} + \log\frac{2}{n} + \ldots + \log 1\right]$.

$= \log n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}_{\text{Riem. Summe}}$

für $\int_0^1 \log x \, dx$.

mit Partition $P^{(n)} = \{0, \frac{1}{n}, \ldots, 1\}$,

$\xi_k^{(n)} = \frac{k}{n}$

$$\sum_{k=0}^{n} \log\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$\rightarrow \int_{0^+}^{1} \log x \, dx = x\log x - x \Big|_{0^+}^{1}$$

$$= -1$$

d.h.

$$\frac{1}{n} \log n! - \log n \xrightarrow[n\to\infty.]{} -1$$

oder $\dfrac{(n!)^{1/n}}{n} \rightarrow e^{-1}$

$$\boxed{n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

Stirlingsche Formel

$$\boxed{\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \xrightarrow[n\to\infty.]{} 1}$$

§ 5.8. Uneigentliche Integral

① $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$(-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(-\infty, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}.$

$\int_0^\infty e^{-x} dx = ?$ $\int_a^\infty f(x)\, dx = ?$

Intervall nicht kompakt

oder

② f ist unbeschränkt,

$$\int_0^{1} \frac{1}{(1-x)^2}\,dx \qquad \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Problem Punkt!

Bsp. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

hat keinen Sinn da $1/\sqrt{x}$ in $x=0$ nicht definiert ist

Aber $\forall\, \varepsilon>0$ ist $\frac{1}{\sqrt{x}}$ auf $[\varepsilon, 1]$ definiert

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_\varepsilon^1 x^{-1/2}\,dx$$

$$= 2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1$$

$$= 2\cdot 1 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

$$= 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

Also existiert

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} 2-2\sqrt{\varepsilon}$$

$$= 2.$$

Bsp. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

Für jede $b \in \mathbb{R}$

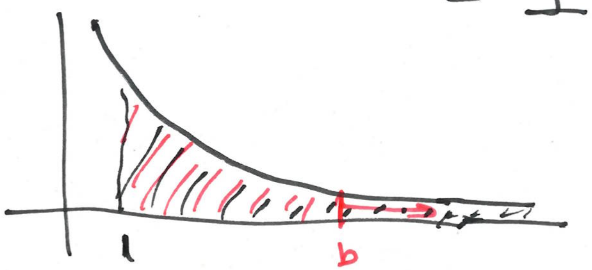
$$\int_1^b x^{-2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^b$$

$$= -\frac{1}{b} + 1$$

$$= 1 - \frac{1}{b}.$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2}\,dx = \lim_{b\to\infty} 1 - \frac{1}{b}$$

$$= 1.$$



Defn Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ für alle $b \geq a$.

Falls $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$

existiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$

und sagen dass f auf $(a, +\infty)$ integrierbar ist.

oder dass

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{konvergiert}$$

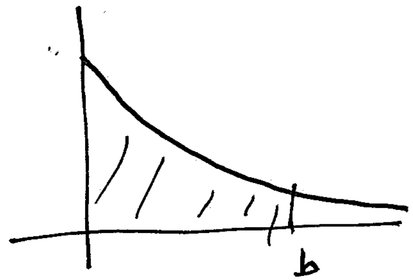
Falls $\lim\limits_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,dx$

nicht existiert,

sagen wir dass

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{divergiert.}$$

<u>Bsp.</u> 1) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$



$$\int_0^b e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^b$$

$$= 1 - e^{-b}$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} 1 - e^{-b}$$

$$= 1.$$

$\alpha > 0$

2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = ?$

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \ln|x|\Big|_1^b & \alpha = 1 \\ \dfrac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_1^b & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \ln|b| & \alpha = 1 \\ \dfrac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = ?$$

Falls $\alpha = 1$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln|b|$$

$= \infty$.

divergent!

$$\lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right)$$

∞ Falls $1-\alpha > 0$

konv gegen 0 falls $1-\alpha < 0$

$$\boxed{\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{divergent} & \alpha \le 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \end{cases}}$$

3) $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx$

$x^2 = u$

$2x = \frac{du}{dx}$

$du = 2x\,dx$

$$\int x e^{-x^2} dx = \int e^{-u} \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-e^{-u}\right) = -\frac{e^{-u}}{2}$$

$$\boxed{\int x e^{-x^2} dx = -\frac{e^{-x^2}}{2}}$$

$$\int_0^b x e^{-x^2} dx = -\frac{e^{-x^2}}{2}\Big|_0^b$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{e^{-b^2}}{2}.$$

$$\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-b^2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}.$$

Bmk. Analog kann man $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ als $\displaystyle\lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)\,dx$ definieren.

Bmk. Es ist oft der Fall dass wir keine explizite Stammfunktion für f angeben können. Aber mit dem Folgende Satz, manchmal können wir entscheiden ob ein uneigentliche Integral konv. oder nicht.

Lemma Majoranten Kriterium

Sei $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ beschränkt ~~auf~~ und integrierbar auf $[a,b]$ $\forall b \in \mathbb{R}, b > a$

1) Falls $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \geq a$ und $g(x)$ ist auf $[a,\infty)$ integrierbar, so ist f auf $[a,\infty)$ integrierbar.

2) Falls $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergiert, so divergiert $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Bsp.

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$$ konvergent oder div?

Für $x>1$, $e^{-x^2}<e^{-x}$

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} -e^{-b}+e^{-1}$$

$$= 1/e$$

Somit auch

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx < \int_1^\infty e^{-x}\,dx = 1/e$$

konvergent und

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx < 1/e.$$

Bmk. $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ konv.

normales Integral $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ uneigent. Integral

Bsp. Sei $\alpha > 0$

Wann konvergent

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx \;?$$

Sei $b > 1$

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx + \int_1^b \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx.$$

$$\frac{1}{2x^\alpha} \leq \frac{1}{1+x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

$\forall x \geq 1$

woraus folgt:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx}_{\text{divergent für } \alpha \leq 1} \leq \int_1^\infty \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx \leq \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,d}_{\text{konv. für } \alpha > 1}$$

Somit

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx \quad \text{konvergiert für } \alpha > 1$$

und divergiert für $\alpha \leq 1$.

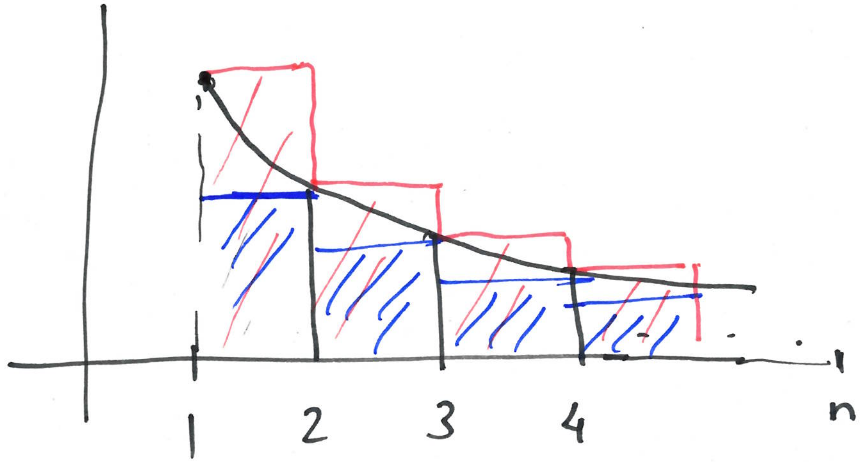
(Integral Test)

Satz Sei $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$ mon. fallend. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ genau dann wenn $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergiert

und diesem Fall gilt

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^\infty f(x)\,dx \leq f(1)$$

Beweis.



$$\big(f(1) + f(2) + \dots f(n-1)\big) \geq \int_1^n f(x)\,dx \geq f(2) + f(3) + \dots f(n)$$

$$\left[\sum_{k=1}^{n} f(k)\right] - f(n)$$

$$\geq \int_1^n f(x)\,dx$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1)$$

$$0 \leq f(n) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx \leq f(1)$$

$$\Longrightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^\infty f(x)\,dx \leq f(1)$$

Bsp. $\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$

konvergent für alle $s > 1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^s}\,dx$$

$$= \begin{cases} \text{divergent} & \text{Falls } s=1 \\ \text{divergent} & \text{falls } s<1 \\ \text{konv. gegen } \frac{1}{s-1} & \text{falls } s>1 \end{cases}$$

$$0 \le \sum_{n=\phi}^{\infty} n^{-s} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx \le f(1)$$

For $s > 1$

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \frac{1}{s-1} \le 1$$

$$\frac{1}{s-1} \le \sum n^{-s} = \zeta(s) \le 1 + \frac{1}{s-1}$$

$$1 \le \zeta(2) \le 2$$

$$\|$$

$$\frac{\pi^2}{6}.$$