1.6.22

Das Uneigentliche Integral

Defn Sei $f: [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ für alle $b > a$.

Falls $\lim\limits_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$ existiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit $\int_a^\infty f(x)\,dx$ und sagen dass f auf $[a, \infty[$ integrierbar ist und das Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergiert.

Bsp. $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ konvergiert

$$= \lim_{b \to \infty} \int_1^b e^{-x}\,dx = \lim_{b \to \infty} -e^{-x} \Big|_1^b = \frac{1}{e}$$

Bsp.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \text{divergent falls } s \leq 1 \\ \text{konvergiert falls } s > 1 \end{cases}$$

Falls $s > 1$, $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{s-1}$

Lemma Majoranten Kriterium

Sei $f: [a, \infty[\to \mathbb{R}$ beschränkt $\forall b > a$ und integrierbar auf $[a, b]$ $\forall b > a$

1) Falls $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \geq a$ und $g(x)$ ist auf $[a, \infty[$ integrierbar, so ist f auf $[a, \infty[$ integrierbar

2) Falls $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergiert, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$

Bsp. $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^s}\,dx$ konv. falls $s > 1$

div. falls $s \leq 1$

$\left(\frac{1}{2x^s} \leq \frac{1}{1+x^s} \leq \frac{1}{x^s}, \text{ falls } x \geq 1 \right)$ //

Satz (Integral Test für Reihen)

Sei $f : [a, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$ monotone fallend. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ genau dann, wenn $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert, und in diesem Fall gilt

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq f(1)$$

Bsp.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx \begin{cases} \text{divergiert falls } s \leq 1 \\ \text{konvergiert falls } s > 1 \end{cases}$$

$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ ist divergent für $s \leq 1$

konv. für $s > 1$

Für $s > 1$

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} - \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^s}\right) dx \leq 1$$

$$0 \leq \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \leq 1$$

$$\boxed{\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1} \quad \forall s > 1.}$$

Clicker Frage

$s > 0, \quad s \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^s}$$

Sei $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^s}$

f ist mon. fallend.

Übung: $f'(x) < 0$.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^s}\,dx = ?$$

$$I = \int \frac{1}{x(\log x)^s}\,dx.$$

$u = \log x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

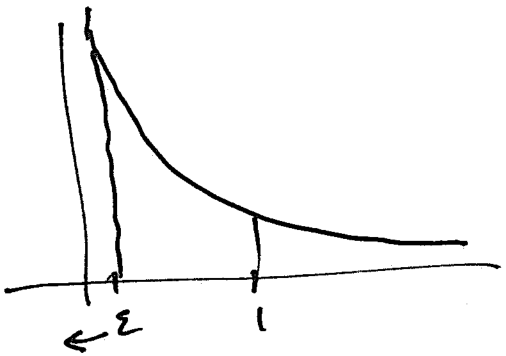
$$I = \int \frac{du}{u^s}$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x(\log x)^s}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_{\log 2}^{\log b} \frac{du}{u^s} = \underbrace{\int_{\log 2}^{\infty} \frac{du}{u^s}}_{\text{konv falls } s>1}$$

Sei $f:]a, b] \to \mathbb{R}$ auf jedem Interval $[a+\varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$ beschränkt und integrierbar aber nicht notwendigerweise auf $]a, b]$ beschränkt

z.B $f(x) = \frac{1}{x}$: $]0, 1]$



Defn Sei f eine Funktion auf jedem Intervall $[a+\varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$ beschränkt und integrierbar

$f:]a, b] \to \mathbb{R}$ ist ~~ist~~ integrierbar falls

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \quad \text{existiert}$$

Im diesem Fall, wird der Grenzwert mit $\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet.

Bmk. Majoranten Kriterium gilt auch für diese uneigentliche Integrale.

Falls $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in]a, b]$

und $\int_a^b g(x)\, dx < \infty$

Dann konv auch

$\int_a^b f(x)\, dx$.

Bsp. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$

$\frac{1}{x^\alpha} :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \begin{cases} \ln|x| \Big|_\varepsilon^1 & \alpha = 1 \\ \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \Big|_\varepsilon^1 & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \begin{cases} -\ln|\varepsilon| & \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{Falls } 1-\alpha > 0 \\ \infty & \text{Falls } 1-\alpha < 0 \end{cases}$$

Folglich. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} =$ divergent $\alpha \geq 1$, konv. $\alpha < 1$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{matrix} \text{div.} & \alpha \leq 1 \\ \text{konv.} & \alpha > 1 \end{matrix}$$

<u>Bmk.</u> ① $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx =$

$$= \lim_{b \to -\infty} \int_b^a f(x)\,dx$$

$$+ \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,dx.$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ konv. $\iff$ Beide $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ und $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ konv.

Im Allg sei f eine Funktion auf einem offene Intervall $]a, b[$, definiert und deren Einschränkung auf jedes kompakte Teilintervall $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ integrierbar ist.

Dann ist das uneigentliche Integral f von a bis b definiert als.

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\tilde{a} \searrow a} \lim_{\tilde{b} \nearrow b} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(x)\,dx$$

(a, und b kann $\pm\infty$ sein).

Bsp.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \to \text{div. für alle } \alpha!$$

$$:= \lim_{a \to 0} \lim_{b \to \infty} \int_a^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

$$\underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx}_{\text{konv. } \alpha < 1} + \underbrace{\lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx}_{\text{konv } \alpha > 1}.$$

Bmk. !! Vorsicht!

Die beiden Grenzwerte müssen im Allg. unabhängig voneinander genommen werden.

Bsp. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$

$$\overset{?}{=} \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} x\,dx = 0$$

$$\int_{-b}^{b} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{(-b)}^{b} = 0.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^{1} x\,dx + \int_{1}^{\infty} x\,dx$$

$$\underbrace{\lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{1} x\,dx}_{\text{existiert nicht}} + \underbrace{\lim_{a\to\infty} \int_{1}^{a} x\,dx}_{\text{existiert nicht.}}$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ divergiert.

Bmk. Viele wichtige Funktionen sind als Integrale definiert.

Eine wichtige Bspeis **Euler Gamma Funktion**.

Für $s > 0$

$$\Gamma(s) := \underbrace{\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx}$$

Übung: konv. für $s > 0$.

$\Gamma(s)$ "interpoliert" die Funktion $n \mapsto (n-1)!$

$n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-x}}_{g'} \underbrace{x^n}_{f}\, dx$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x} x^n\, dx.$$

$$\int_0^b e^{-x} x^n\, dx \overset{\text{Partielle Int.}}{=} -e^{-x} x^n \Big|_0^b$$

$$+ \int_0^b e^{-x} n x^{n-1}\, dx$$

$$\Gamma(n+1) = \lim_{b\to\infty} \left[\cancel{-e^{-b} b^n} - 0\right] + \lim_{b\to\infty} n\int_0^b e^{-x} x^{n-1}\,dx$$

$$= n\,\Gamma(n)$$

$$\Gamma(n+1) = n\,\underbrace{\Gamma(n)}$$
$$= n\,(n-1)\,\underbrace{\Gamma(n-2)}_{(n-2)\,\Gamma(n-3)}$$

$$= n\,(n-1)\cdots 1.$$

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$

Clicker welche $x>0$ NICHT mon. wachsend?

$x \xrightarrow{f} \int_0^x t\,dt \qquad f'(x) = x > 0$

$x \xrightarrow{f} \int_0^x t^2\,dt \qquad f'(x) = x^2 > 0$

$x \xrightarrow{f} \int_0^x \sin t\,dt \qquad f'(x) = \sin x$

$x \xrightarrow{f} \int_0^x \sin^2 t\,dt. \qquad f'(x) = \sin^2 x > 0$

Partialbruchzerlegung.

Um Rationale Funktionen

$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ zu integrieren

benutzen wir "Partialbruchzerleg."
PBZ

PBZ = Eine Darstellung von $R(x)$
als Summe von
"elementaren" Rationale
Funktionen.

z.B. $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$

$= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$

$= \frac{a(x+1) + b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$\boxed{a(x+1) + b(x-1)} = 1 \quad \forall x$

$\boxed{(a+b)x + (a-b) = 1}$

$\left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ a-b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-b$
$\Rightarrow -2b=1$
$b=-\frac{1}{2}$

$a = 1/2$

oder

$x=1 \Rightarrow 2a = 1$
$a = 1/2$

$x=-1 \Rightarrow -2b=1$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$$

Bsp $\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

$$= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{a(x+1)(x^2+1) + b(x-1)(x^2+1) + (cx+d)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow a(x+1)(x^2+1) + b(x-1)(x^2+1) + (cx+d)(x^2-1) = 1$$

$$\Rightarrow (a+b+c)x^3 + (a-b+d)x^2 + (a+b-c)x + a-b-d = 1$$

$$\begin{aligned} a+b+c&=0\\ a-b+d&=0\\ a+b-c&=0\\ a-b-d&=1 \end{aligned}$$

oder

$$a(x+1)(x^2+1) + b(x-1)(x^2+1)$$
$$+ (cx+d)(x^2-1)$$

$$= 1 .$$

$x=1 \Rightarrow a \cdot 2 \cdot 2 = 1$

$\Rightarrow a = 1/4 .$

$x=-1 \Rightarrow b(-2)(2) = 1$

$b = -1/4 .$

$x=0 \Rightarrow a + b(-1)(1)$

$+ d \cdot (-1) = 1$

$\Rightarrow d = \ldots$

$x = 2 \Rightarrow \ldots \; c = \ldots$

Partialbruchzerlegung (PBZ)

Sei $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine Rationale Funktion und

$$Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$= \prod_{k=1}^{N} (x - x_k)^{n_k} \prod_{j=1}^{M} \left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)^{m_j}$$

Dann gilt

$$R(x) = P_1(x) + \sum_{k=1}^{N} R_k(x) + \sum_{j=1}^{M} S_j(x)$$

wobei $P_1(x)$ ein Polynom

$$R_k(x) = \frac{a_{k1}}{(x-x_k)} + \frac{a_{k2}}{(x-x_k)^2} + \dots + \frac{a_{kn_k}}{(x-x_k)^{n_k}}$$

$1 \leq k \leq N$

$$S_j(x) = \frac{b_{j1}x + d_{j1}}{\left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)} + \frac{b_{j2}x + d_{j2}}{(\quad)^2} + \dots + \frac{b_{jm_j}x + d_{jm_j}}{\left((x-\alpha_j)^2 + (\beta_j^2)\right)^{m_j}}$$

$1 \leq j \leq M.$

$Q(x)$ hat reelle Nullstellen x_k mit Vielfachheit n_k

und hat komplex konj. Nullstellen $\alpha_j \pm \beta_j i$ mit Viel. m_j

$$\left(x - (\alpha_j + i\beta_j)\right)\left(x - (\alpha_j - i\beta_j)\right) = (x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2$$

Bmk ① Das Polynom $P_1(x)$ tritt nur auf falls $\operatorname{grad} P > \operatorname{grad} Q$

In diesem Fall berechnet man $P_1(x)$ mit Polynom Division und es gilt.

$$P(x) = P_1(x)\,Q(x) + P_2(x)$$

$$\operatorname{grad} P_2 < \operatorname{grad} Q$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$$

Bsp. $\dfrac{4x^3 - 3x + 5}{x^2 - 2x}$

$$\begin{array}{l|l}
4x^3 - 3x + 5 & x^2 - 2x \\ \hline
-\,(4x^3 - 8x^2) & 4x + 8 \\ \hline
8x^2 - 3x & \\
-\,(8x^2 - 16x) & \\ \hline
13x + 5 &
\end{array}$$

$$4x^3 - 3x + 5 = (4x + 8)(x^2 - 2x) + (13x + 5)$$

$$\frac{4x^3 - 3x + 5}{x^2 - 2x} = 4x + 8 + \frac{13x + 5}{x^2 - 2x}$$

$$\frac{13x+5}{x^2-2x} = \frac{13x+5}{x(x-2)}$$

$$\frac{13x+5}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$A(x-2) + B(x) = 13x+5$$

$$x=2 \Rightarrow 2B = 31$$

$$B = 31/2$$

$$x=0 \Rightarrow -2A = 5$$

$$A = -\frac{5}{2}.$$

$$\frac{4x^3-3x+5}{x^2-3x} = 4x+8 - \frac{5/2}{x} + 31/2 \, \frac{1}{x-2}$$

Bmk Unbekannte Parameter, die bestimmt werden müssen, sind

a_{kl} $k=1, \dots N$

$l=1, \dots, n_k$

b_{jl}, d_{jl} $j=1. \dots M$

$l=1, \dots, m_j$

Diese Parameter werden durch koeff-vergleich berechnet, die Rechte Seite wird dabei auf den Hauptnenner gebracht.

Grundform der Rationale Funktionen

① Polynom $P(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n$

$$\int P(x)\,dx = \sum_{n=0}^{k} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

2) Inverse Potenzen.

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \begin{cases} \ln|x-a| + c & n=1 \\ \frac{1}{x^{n-1}} \cdot \frac{1}{1-n} & n \geq 2 \end{cases}$$

3) $\displaystyle\int \frac{bx+d}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^m}\,dx$.

$$x - \alpha = \beta t$$

$$dx = \beta\,dt$$

$$\int \frac{b(\beta t + \alpha) + d}{\beta^{2m}(t^2+1)^m}\,dt$$

$$= K \int \frac{Ct + D}{(t^2+1)^m}\,dt$$

$$\left(K = \frac{1}{\beta^{2m}}, \quad C = b\beta, \quad D = \alpha b + d\right)$$

$$\int \frac{Ct+D}{(t^2+1)^m}\,dt$$

$$= \underbrace{C\int \frac{t}{(t^2+1)^m}\,dt} + D\int\frac{dt}{(t^2+1)^m}$$

Sei $u = t^2+1$

$du = 2t$

$$\frac{C}{2}\int \frac{du}{u^m}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{C}{2}\,\dfrac{u^{-m+1}}{1-m} = \dfrac{C}{2}\,\dfrac{(t^2+1)^{1-m}}{1-m}, & m \neq 1 \\[2ex] \dfrac{C}{2}\ln|u| = \dfrac{C}{2}\log|t^2+1|, & m = 1 \end{cases}$$

Sei $I_m := \int \frac{dt}{(t^2+1)^m}$

$$I_1 = \int \frac{dt}{(t^2+1)} = \arctan t + K.$$

$$\boxed{\text{Übung: } 2m\,I_{m+1} = \frac{t}{(t^2+1)^m} + (2m-1)I_m}$$

Hint:

$$I_m = \int 1 \cdot \frac{1}{(t^2+1)^m}\,dt \qquad \text{sei } g' = 1, \quad f = \frac{1}{(t^2+1)^m}$$

$\Leftarrow$ Partielle Integration. $\quad \ldots\ldots = \dfrac{t}{(t^2+1)^m} +$

$$2m\,[I_m - I_{m+1}]$$

Clicker Frage

$$\int \frac{\cos x \; dx}{\sin^2 x + \sin x - 2}$$

$\sin x = u$

$\cos x \, dx = du$

$$= \int \frac{du}{u^2+u-2}$$

$$= \int \left(-\frac{1}{3} \frac{1}{u+2} + \frac{1}{3} \frac{1}{u-1} \right) du$$

$$\frac{1}{u^2+u-2} = \frac{A}{(u+2)} + \frac{B}{(u-1)}$$

$$A(u-1) + B(u+2) = 1$$

$u=1 \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

$u=-2 \Rightarrow -3A = 1$

$\Rightarrow A = -\frac{1}{3}$

$$= -\frac{1}{3} \ln|u+2| + \frac{1}{3} \ln|u-1|$$

$$= \frac{1}{3} \ln\left|\frac{u-1}{u+2}\right| = \frac{1}{3} \ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 2}\right| + C.$$