28.02.22

Defn Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge $(A \neq \emptyset)$

1) $c \in \mathbb{R}$ ist eine obere (untere) Schranke von A falls

$$\forall a \in A: \quad a \leq c \qquad (c \leq a)$$

2) Die Menge A heisst nach oben (unten) beschränkt falls es eine obere (untere) Schranke gibt

3) Ein Element $m \in \mathbb{R}$ heisst ein Maximum (Minimum) von A falls $m \in A$ und m eine obere (untere) Schranke von A ist.

Satz: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Sei A nach oben beschränkt. Dann $\exists$ ein kleinste obere Schranke von A. d.h es gibt $c \in \mathbb{R}$ so dass (i) $\forall a \in A: a \leq c$

(ii) Falls $a \leq x$ $\forall a \in A$, ist $c \leq x$

(c ist kleiner als jede andere obere Schranke)

$c := \operatorname{Sup} A$, Supremum von A

$c = \operatorname{Sup} A \iff$

$$\underbrace{(\forall a \in A: a \leq c)}_{\text{c ist eine obere Schranke}} \wedge \underbrace{(\forall \varepsilon > 0: \exists a \in A: a > c - \varepsilon)}_{\text{c ist die kleinste obere Schranke.}}$$

$c = \operatorname{Inf} A \iff$

$$\underbrace{(\forall a \in A: a \geq c)}_{\text{c ist eine untere Schranke}} \wedge \underbrace{(\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A: a < c + \varepsilon)}_{\text{c ist die grösste untere Schranke.}}$$

Konvention: Falls A nach oben nicht beschränkt ist, definieren wir

$$\operatorname{Sup} A := +\infty.$$

(Falls nach unten nicht beschränkt ist, $\operatorname{Inf} A := -\infty$)

Eigenschaften von Sup und Inf

1) Seien $A \subset B \subset \mathbb{R}$ Teilmengen von $\mathbb{R}$

- Falls B nach oben beschränkt ist, folgt $\sup A \leq \sup B$
- Falls B nach unten beschränkt ist, folgt $\inf B \leq \inf A$

2) Falls $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$, dann gilt $\sup A \leq \inf B$

3) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

$$\sup(cA) = \begin{cases} c \sup A & \text{falls } c > 0 \\ c \inf A & \text{falls } c < 0 \end{cases}$$

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

Bmk: Das Supremum (Infimum) ist eine natürliche Verallgemeinerung des Maximums (Minimum) einer Menge. (Max (min) muss (sogar für beschränkte Intervalle) nicht existieren.)

Bsp. $A = (1, 2)$ $\sup A = 2$, $\inf A = 1$

kein min, kein max.

Euklidische Raum

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

$cx := (cx_1, \dots, cx_n)$

$$\boxed{\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$$ Das Skalarprodukt

$$\boxed{\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}}$$ Die Norm des Vektors x.

Eigenschaften des Skalarprodukts

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ (Gleichheit $\Leftrightarrow x = 0$)
- $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

Eigenschaften der Norm

- $\|x\| \geq 0$ (Gleichheit $\Leftrightarrow x = 0$)
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$ (Cauchy-Schwarz)

Defn Das Kreuzprodukt

Sei $a, b \in \mathbb{R}^3$. Das Kreuzprodukt $a \times b$ ist definiert durch

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(a, b) \longmapsto (a \times b) := (a_2 b_3 - a_3 b_2, \; a_3 b_1 - a_1 b_3, \; a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

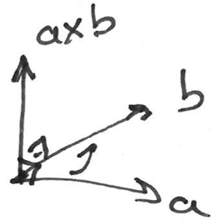
wobei $a = (a_1, a_2, a_3)$
$b = (b_1, b_2, b_3)$

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

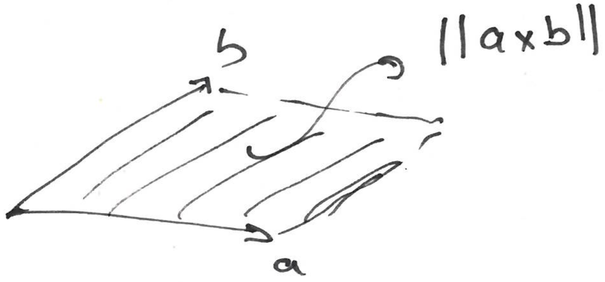
$$e_1 (a_2 b_3 - b_2 a_3) + e_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + e_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a, b, $a \times b$ definieren ein Rechtsystem



$\|a \times b\|$ = Flächeninhalt des von a und b aufgespannte parallelogram



Eigenschaften des Kreuzprodukts

1) $(a+b) \times c = \cancel{a \times b}\ a \times c + b \times c$

2) $a \times b = -b \times a$ Antisym.

3) $a \times (b \times c) + c \times (a \times b) + b \times (c \times a) = 0$

Jacobi identität.

§1.3 Komplexe Zahlen.

Wir definieren auf $\mathbb{R}^2$ folgende Multiplikation

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Als Addition haben wir

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Dann gilt insbesondere

$$(0, 0) \cdot (x, y) = (0, 0)$$

$$(1, 0) \cdot (x, y) = (x, y)$$

Falls $(x,y) \neq (0,0)$

$$(x,y) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = (1,0).$$

Dann ist es "einfach" zu verifizieren dass alle Körper Axiomen gelten.

<u>Satz</u> $(\mathbb{R}^2, \cdot, +)$

$\mathbb{R}^2$ versehen mit der Addition der Vektoren und oben definierter Multiplikation $\cdot$ ist ein Körper mit

Einselement $= (1,0)$ und

Nullelement $= (0,0)$.

$(\mathbb{R}^2, \cdot, +)$ wird Körper der Komplexe Zahlen genannt und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

mittels die folgende ~~Die~~ Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (x,0)$$

(Insbesondere $1 \mapsto (1,0)$)

können wir $\mathbb{R}$ als ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ identifizieren

Sei $\boxed{i := (0,1)}$

Dann besitzt jedes

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige

Darstellung

$$z := (x,y) = \underbrace{(x,0)}_{x}\underbrace{(1,0)}_{1} + \underbrace{(y,0)}_{y}\cdot\underbrace{(0,1)}_{i}$$

$$= x \cdot 1 + y \cdot i$$

<u>Bmk:</u> $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$

$= -(1,0)$

$"=" -1.$

Zusammen mit Distr. gesetz

Falls $z_1 = (x_1, y_1) = x_1 \cdot 1 + y_1 \cdot i$

$z_2 = (x_2, y_2) = x_2 \cdot 1 + y_2 \cdot i$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i$$

<u>Defn</u> Sei $z = x + yi$

$\operatorname{Re} z$ — Realteil von z

$\operatorname{Im} z$ — Imaginärteil von z.

Für $z = x + yi$, die konjugierte Zahl $\bar{z} := x - yi$

<u>Satz</u> i) $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

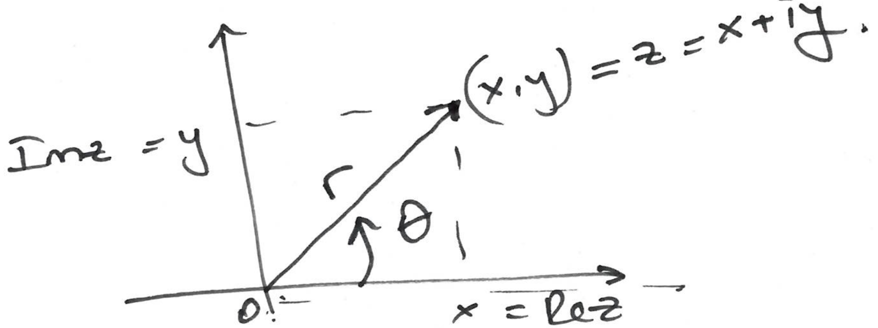
$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

(ii) $z\bar{z} = x^2 + y^2 = \|z\|^2$.

Falls $z \neq 0$ ($\bar{z} \neq 0$)

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2}.$$

Man kann Komplexe Zahlen auch in Polarform darstellen.



Wir können $z = (x,y)$ als ein Punkt in der Ebene darstellen. Sei θ den Winkel zwischen die Halbgerade $[0,\infty)$ und d. $\overrightarrow{0z}$

Dann ist $\boxed{x = r\cos\theta}$ $\boxed{y = r\sin\theta}$ wobei $\boxed{r = \|z\| = \sqrt{x^2+y^2}}$.

<u>Notation</u> : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = z$

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ $\qquad$ $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$.

- $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$, $z_2 \neq 0$
- $z^n = r^n e^{in\theta}$

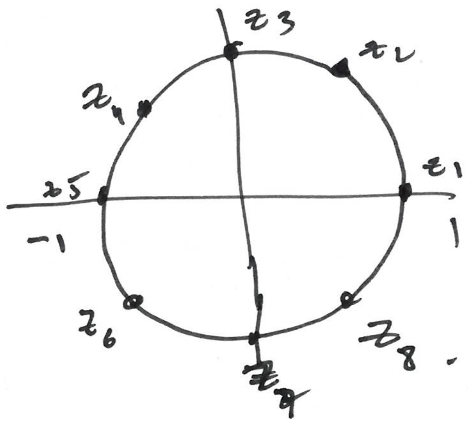
Satz Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Dann hat die Gleichung $z^n = 1$ genau n Lösungen in $\mathbb{C}$

$z_1, z_2 \dots z_n$, wobei

$$z_j = \cos \frac{2\pi j}{n} + i \sin \frac{2\pi j}{n}$$

$$1 \leq j \leq n$$



$z^8 = 1$.

Satz (Fundamentalsatz der Algebra).

Sei $n \geq 1$ $n \in \mathbb{N}$.

und

$$p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0.$$

$$a_j \in \mathbb{C}$$

Dann gibt es $z_1, z_2 \dots z_n \in \mathbb{C}$ so dass

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

Kapitel 2.

Folgen und Reihen

(Sequences) (Series)

Defn. Eine Folge ist eine Abbildung.

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow M$$

wobei M eine Menge und $\mathbb{N}$ Naturliche Zahlen sind.

Wir bezeichnen das Bild mit a_n statt $a(n)$.

Bsp. 1) $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

$$a : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longrightarrow 2^n.$$

2) $1, -1, 1, -1, \ldots$

$$a_n = (-1)^{n+1}$$

3) Man kann auch Folgen von Vektoren betrachten.

Sei $M = \mathbb{R}^3$ $\quad a_n = (n, n, n)$

$(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), \ldots$

4) Folgen von Funktionen:

$1, x, x^2, x^3, \ldots$

$a_n(x) = x^{n-1}$

5) Folgen von emoji's

 , ...

6) Input = eine Zahl $n \in \mathbb{N}$.

Output: $\begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ kein Primzahl ist} \\ 1 & \text{falls } n \text{ Primzahl ist.} \end{cases}$

$a(n)$ Output kann man auch als ein Folge auffassen

$0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots$

Zeitaufwand von Alg. A als $a(n)$, a_n

Zeitaufwand von Alg B als b_n auffassen.

Wir möchten wissen wie schell a_n, b_n wächst.

7) Folgen sind oft rekursiv definiert

Seien $a_1, \ldots a_n$ gegeben und dann definiert man $a_{n+1} := \phi(n, a_1, \ldots a_n)$

a_{n+1} ist definiert als eine Funktion von den vorherigen Folgengliedern,

z.B $a_1 = 1$, $a_2 = 1$

$$a_{n+1} = a_{n-1} + a_n.$$

(a_n) ist die Fibonacci Folge.

<u>Notation</u> $(a_n) = a_1, a_2, a_3 \ldots$

$$(a_n)_{n \geq 1}$$

$$(a_n)_{n \geq 10}$$

$$\left(\frac{n}{n-2}\right)_{n \geq 3}$$

<u>Bsp.</u> Ein diskretes "Populationsmodel" beschreibt die Population a_n zum Zeitpunkt n durch die rekursive Beziehung.

$$a_{n+1} = a_n + \beta a_n (L - a_n)$$

wobei β ist ein Wachstumfaktor und L ist die Limitierende Population.

```
In[3]:= a[n_] := a[n] = a[n - 1] + a[n - 1] * 0.5 * (1 - a[n - 1])

In[4]:= a[1] = 0.1

Out[4]= 0.1
```

$\beta = 0.5$

```
In[5]:= Array[a, 100]

Out[5]= {0.1, 0.145, 0.206988, 0.289059, 0.391811, 0.510959, 0.635899, 0.751665, 0.844997,
  0.910486, 0.951236, 0.974429, 0.986888, 0.993358, 0.996657, 0.998323,
  0.99916, 0.99958, 0.99979, 0.999895, 0.999947, 0.999974, 0.999987, 0.999993,
  0.999997, 0.999998, 0.999999, 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1.,
  1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1.,
  1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1.,
  1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1.}
```

```
In[7]:= b[n_] := b[n] = b[n - 1] + b[n - 1] * 1 * (1 - b[n - 1])
        b[1] = 0.1

Out[8]= 0.1
```

$\beta = 1$

```
In[9]:= Array[b, 100]

Out[9]= {0.1, 0.19, 0.3439, 0.569533, 0.814698, 0.965663, 0.998821, 0.999999, 1., 1., 1., 1.,
  1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1.,
  1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1.,
  1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1.,
  1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1.}
```

```
In[10]:= c[n_] := c[n] = c[n - 1] + c[n - 1] * 3 * (1 - c[n - 1])
         c[1] = 0.1

Out[11]= 0.1
```

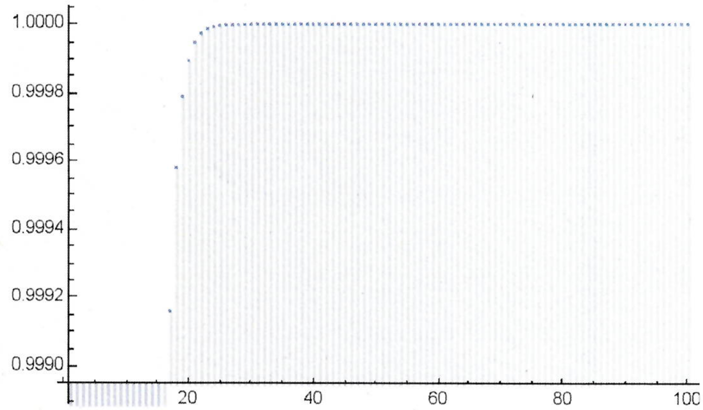
$\beta = 3$

```
In[12]:= Array[c, 100]

Out[12]= {0.1, 0.37, 1.0693, 0.846993, 1.23578, 0.36166, 1.05425, 0.882681, 1.19335,
  0.501158, 1.25115, 0.308456, 0.948389, 1.09523, 0.782331, 1.2932, 0.155706,
  0.550092, 1.29256, 0.15809, 0.557382, 1.2975, 0.139466, 0.499512, 1.24951,
  0.31421, 0.960657, 1.07404, 0.835467, 1.24785, 0.320003, 0.972806, 1.05217,
  0.887498, 1.18703, 0.520986, 1.26966, 0.242514, 0.793618, 1.28498, 0.186386,
  0.641326, 1.33141, 0.00769453, 0.0306005, 0.119593, 0.435464, 1.17297,
  0.564306, 1.3019, 0.122768, 0.445855, 1.18706, 0.520906, 1.26959, 0.242768,
  0.794262, 1.28449, 0.18821, 0.646571, 1.33212, 0.00484139, 0.0192953,
  0.0760641, 0.286899, 0.900663, 1.16907, 0.576107, 1.30873, 0.0965976,
  0.358397, 1.04824, 0.896532, 1.17482, 0.558677, 1.29835, 0.136268, 0.489366,
  1.23903, 0.350546, 1.03354, 0.929552, 1.12601, 0.700351, 1.32993, 0.0135812,
  0.0537716, 0.206412, 0.697831, 1.33042, 0.0116291, 0.0461108, 0.178065,
  0.617137, 1.32597, 0.0292754, 0.114531, 0.41877, 1.14898, 0.635468}
```

In[13]:= `DiscretePlot[a[n], {n, 1, 100}]`

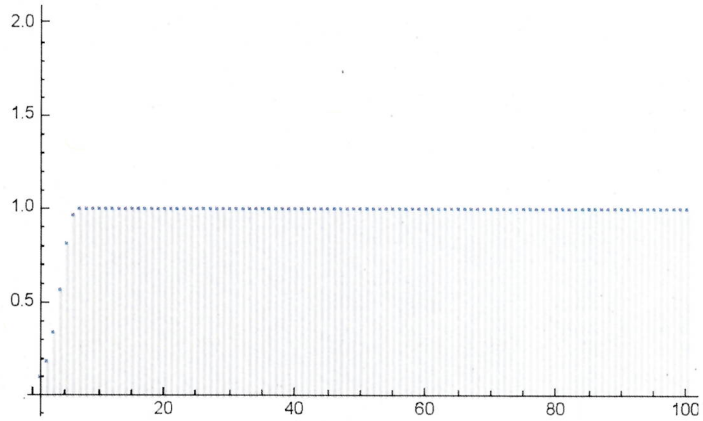
Out[13]=



$\beta = 0.5$

In[14]:= `DiscretePlot[b[n], {n, 1, 100}]`

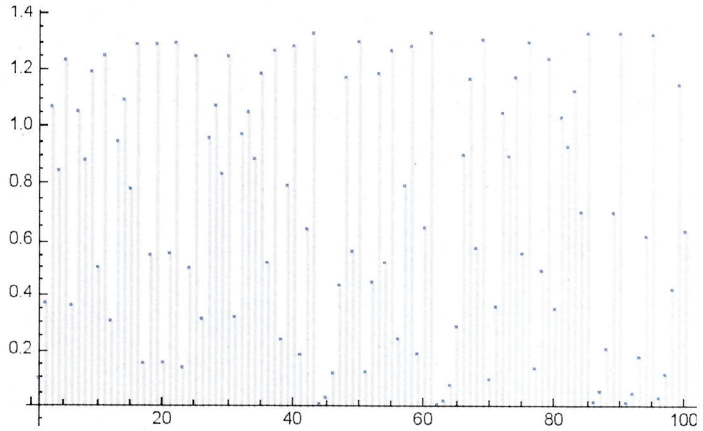
Out[14]=



$\beta = 1$

In[17]:= `DiscretePlot[c[n], {n, 1, 100}]`

Out[17]=



$\beta = 3$

Bmk

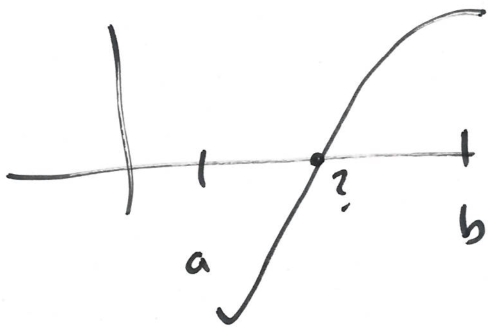
Folgen tauchen immer auf wenn die Lösung eines Problems durch ein Iterationsverfahren berechnet wird.

Bsp. Bisektion.

Gesucht: Nullstelle von

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Voraussetzung $f(a) f(b) < 0$.



Iteration: Definiere zwei Folgen

$(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 0}$ rekursiv

mit den Startwerten

$(u_0, v_0) = (a, b)$ und mit der

folgende Iterationvorschrift

Für $n = 1, 2, \ldots$

$x := \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}$;

if $f(x) = 0$ then return

if $f(x) \cdot f(v_{n-1}) < 0$ then

$u_n := x$, $v_n := v_{n-1}$

else

~~u_n ...~~

$u_n := u_{n-1}$, $v_n := x$.

Output ~~mit~~ x mit $f(x)=0$.

Nullstelle von f

in $[a,b]$.

Bsp. $f: [1,2] \to \mathbb{R}^2$

$f(x) = x^2 - 2$

n	u_n	v_n
0	1	2
1	1	1.5
2	1.25	1.5
	⋮	⋮
10	1.414...	1.415...

§ 2.1 Grenzwert einer Folge.

~~Die Folge~~

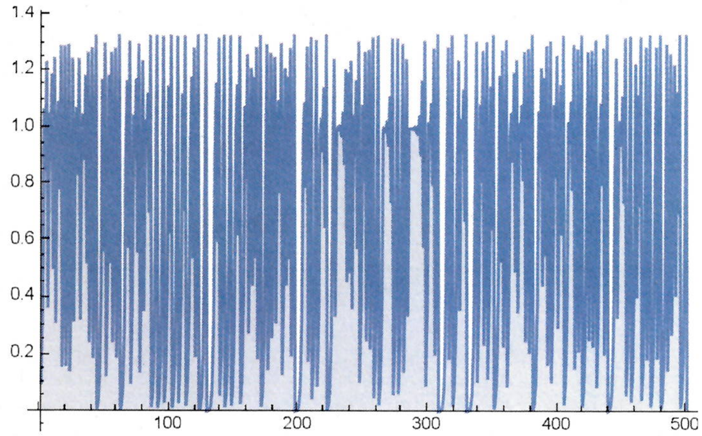
Defn. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst konvergent falls es $l \in \mathbb{R}$ gibt so dass $\forall \varepsilon > 0$ die Menge

$$M(\varepsilon) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin \,]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\,\}$$

endlich ist.

In[22]:=
```
DiscretePlot[c[n], {n, 1, 500}]
```

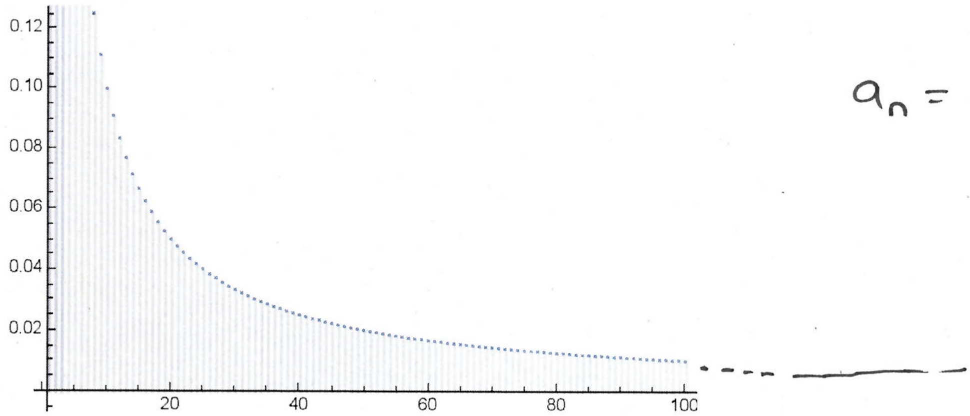
Out[22]=



$$a_{n+1} = a_n + 3a_n(1 - a_n)$$

In[67]:=
```
DiscretePlot[1 / n, {n, 1, 100}]
```

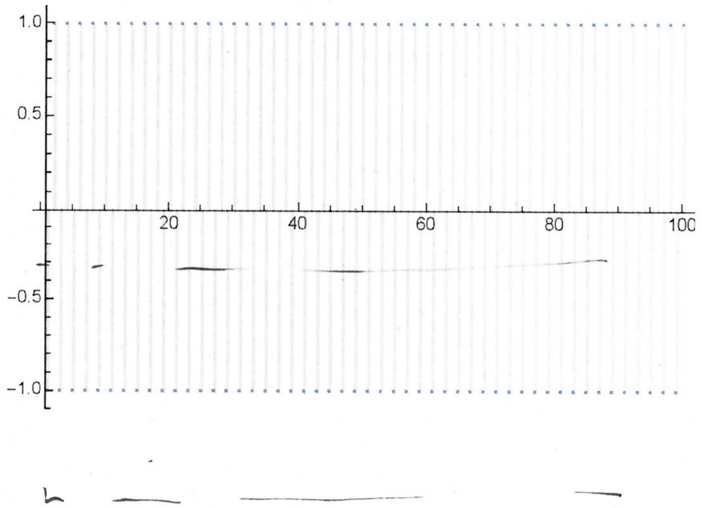
Out[67]=



$$a_n = \frac{1}{n}$$

In[68]:=
```
DiscretePlot[(-1) ^n, {n, 1, 100}]
```

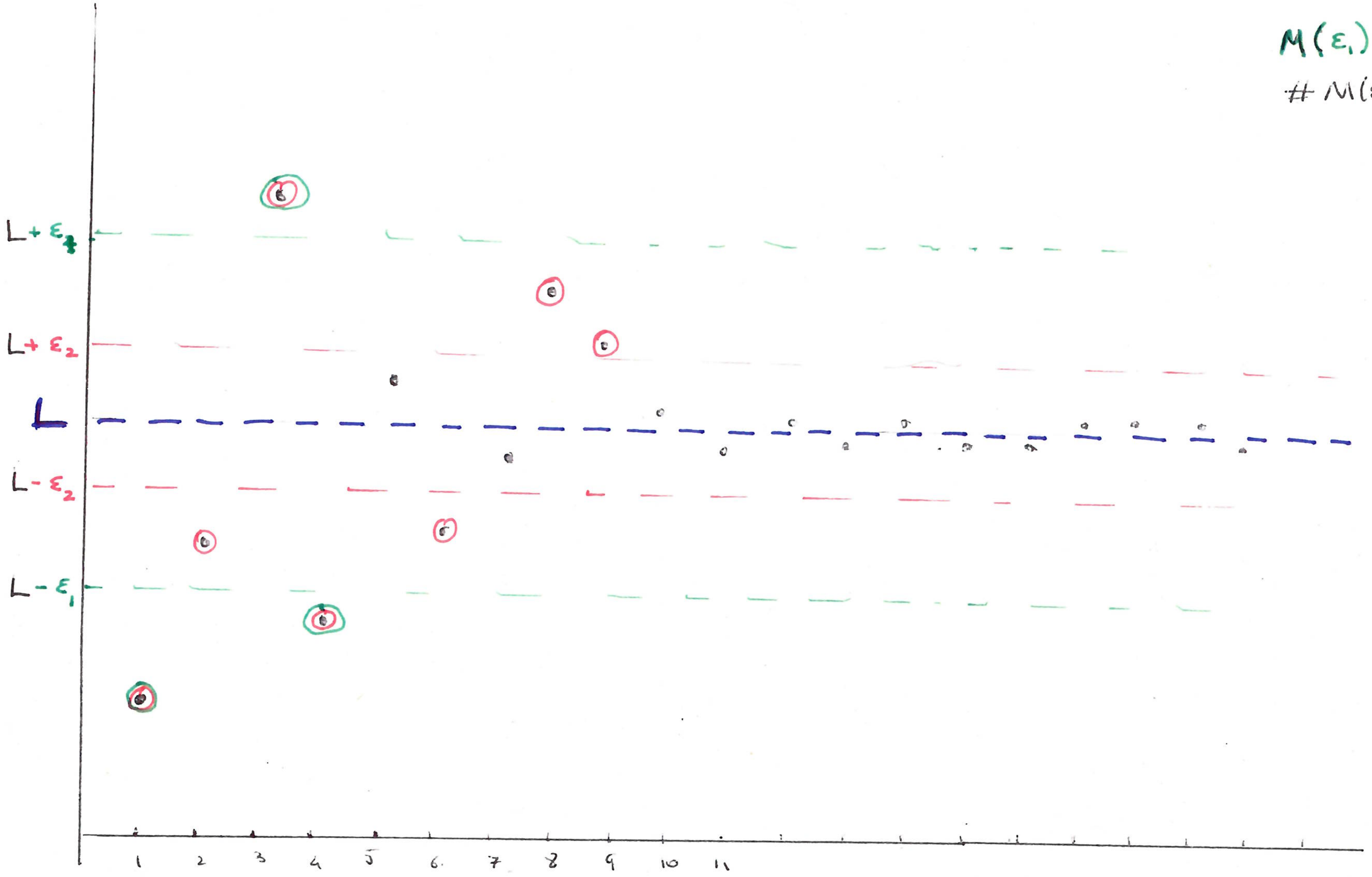
Out[68]=



$$a_n = (-1)^n$$

$M(\varepsilon_1) = \{1, 3, 4\}$

$\# M(\varepsilon_1) = 3$



$M(\varepsilon_2) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

$\# M(\varepsilon_2) = 7$

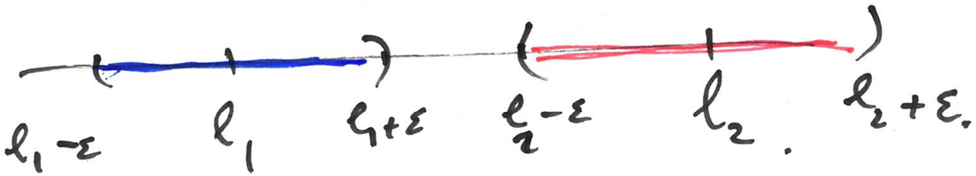
Falls eine solche Zahl ℓ gibt, ist sie eindeutig bestimmt. Sie wird mit

$$\ell := \lim_{n \to \infty} a_n$$

bezeichnet und nennt sich der <u>Grenzwert</u> oder Limes der Folge a_n.

<u>Lemma</u> Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge. Dann gibt es höchstens eine reelle Zahl $\ell \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft: $\forall \varepsilon > 0$ ist die Menge $M(\varepsilon)$ endlich.

<u>Beweis</u>. Wir nehmen an, dass es $\ell_1 < \ell_2$ gibt so dass beide ℓ_1, ℓ_2 die Eigenschaft erfüllen.



Sei $\varepsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{3}$, dann

$$]\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon[\;\cap\;]\ell_2 - \varepsilon, \ell_2 + \varepsilon[\;= \emptyset$$

(*).

Nach Voraussetzung sind

$E_1 = \{ n \mid a_n \notin]l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon[\}$

$E_2 = \{ n \mid a_n \notin]l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon[\}$

endlich.

Insbesondere $\mathbb{N} \setminus E_2$

$= \{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \in]l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon[\}$

ist unendlich.

Andererseits folgt aus $(*)$.

$\mathbb{N} \setminus E_2 \subset E_1$ aber

E ist endlich $\lightning$.