**Defn (Grenzwert einer Folge)**

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto a_n$$

$(a_n)_{n\geq 1}$ heisst konvergent

falls es $L \in \mathbb{R}$ gibt

so dass $\forall \varepsilon > 0$, die Menge

$$M(\varepsilon) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin \left]L-\varepsilon, L+\varepsilon\right[\}$$
$$= \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - L| \geq \varepsilon\}$$

endlich ist.

Falls $L$ existiert, wird sie

mit $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = L}$ bezeichnet

und nennt sich Grenzwert oder

Limes der Folge.

2.3.2022

Anders gesagt: Eine Folge $(a_n)$ hat einen Grenzwert $L$, wenn sich ausserhalb einer beliebig grossen Umgebung von $L$ ( $\left]L-\varepsilon, L+\varepsilon\right[$ ) nur endlich viele Folgenglieder befinden.

Satz: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge.
Dann gibt es höchstens eine reele Zahl $L \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

(*) $\forall \varepsilon > 0$ ist die Menge $M(\varepsilon)$ endlich.

**Beweis:**

Let $L_1, L_2$ so that

$\forall \varepsilon > 0$

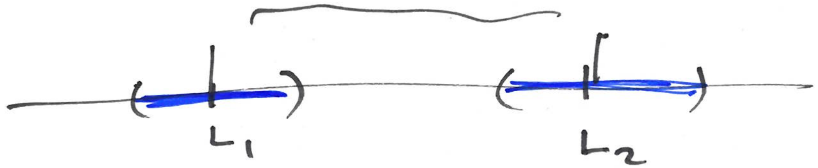
$E_1 := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin ]L_1-\varepsilon, L_1+\varepsilon[\}$

$E_2 := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin ]L_2-\varepsilon, L_2+\varepsilon[\}$.

are finite sets.

Assume $L_1 \neq L_2$, $L_1 < L_2$

$L_1 - L_3$




$$\varepsilon = \frac{L_2 - L_1}{3}$$

$]L_1-\varepsilon, L_1+\varepsilon[ \cap ]L_2-\varepsilon, L_2+\varepsilon[ = \emptyset$.

For this $\varepsilon = \frac{L_2-L_1}{3}$

$\mathbb{N} \setminus E_2$ is infinite.

$\|$

$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in ]L_2-\varepsilon, L_2+\varepsilon[\}$

$\underbrace{\mathbb{N} \setminus E_2}_{\text{infinite}} \subset \underbrace{E_1}_{\text{finite}}$. contradiction.

Let $k \in \mathbb{N} \setminus E_2$

$\Rightarrow a_k \in ]L_2-\varepsilon, L_2+\varepsilon[$.

Since $]L_2-\varepsilon, L_2+\varepsilon[ \cap ]L_1-\varepsilon, L_1+\varepsilon[ \neq \emptyset$

$\Rightarrow a_k \notin ]L_1-\varepsilon, L_1+\varepsilon[$

$\Rightarrow a_k \in E_1$

$\Rightarrow \mathbb{N} \setminus E_2 \subset E_1$

Historisch erste Definition von Grenzwert

Defn: Eine Folge $(a_n)$ konvergiert mit Grenzwert $L$ falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine index $N_\varepsilon > 0$ gibt so dass $|a_n - L| < \varepsilon$ $\forall n > N_\varepsilon$

Die folgende Lemma zeigt ~~das~~ die äquivalenz zwischen dieser 2 Konvergenzbegriffe.

Lemma. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge. Folgende Aussagen sind äquivalent.

1. $(a_n)$ konvergiert gegen $L$ d.h $\forall \varepsilon > 0$, die Menge $M(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin ]L-\varepsilon, L+\varepsilon[\}$ ist endlich.

2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \geq 1$ s.t $|a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$

Beweis Übung.

**Bsp.** 1) Die konstante Folge, $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$a, a, a, \ldots$

$\lim a_n = a$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - a| = 0 < \varepsilon$

$\forall n \geq 1 = N_\varepsilon$

2) $a_n = \frac{1}{n} \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

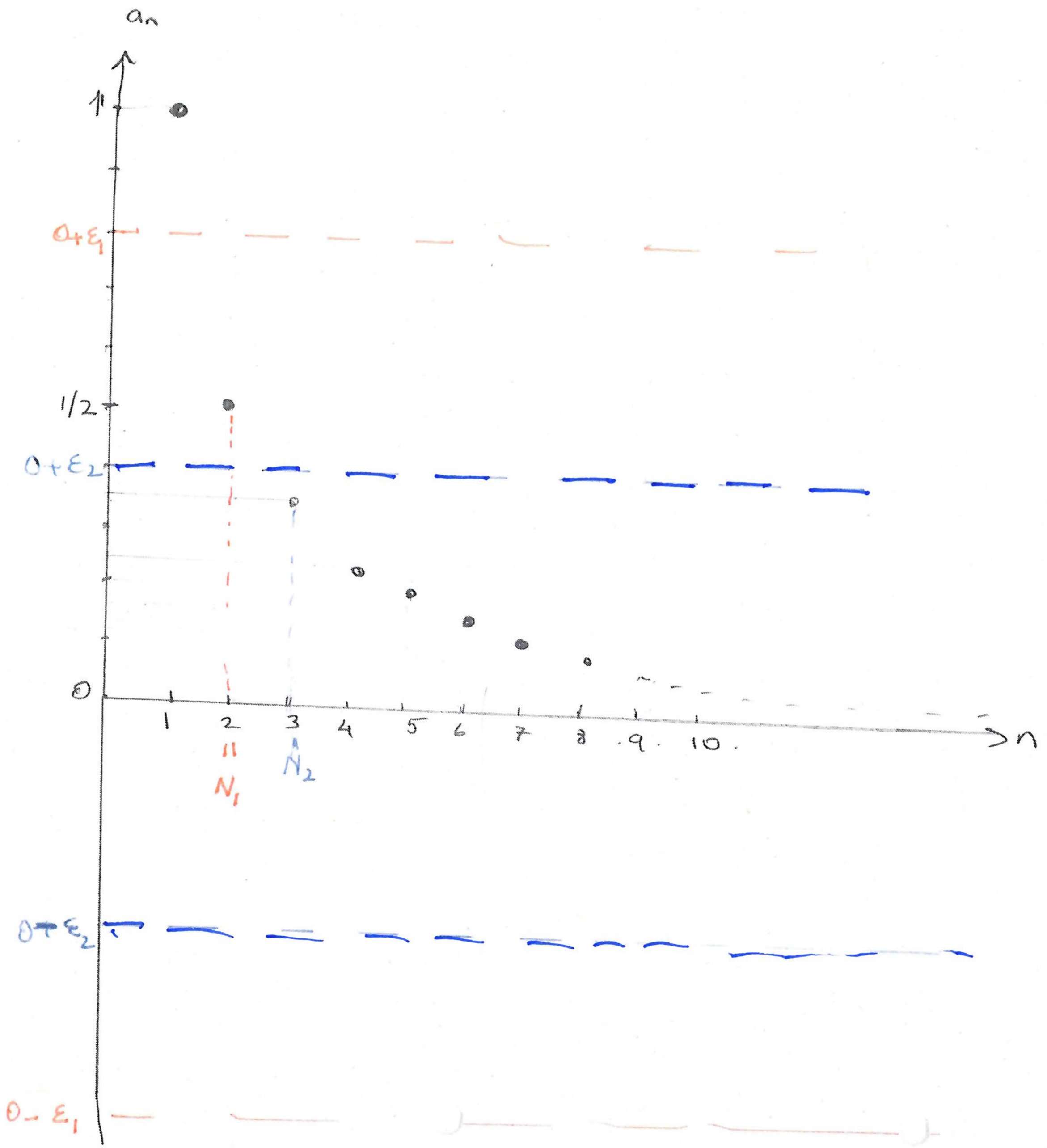
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben;
dann existiert nach Arch. Prinzip ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so dass

$$\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

Daher ist für jedes $n \geq N_\varepsilon$

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

(∞)




$a_n = \frac{1}{n}$.

$\varepsilon_1 = 0.8$

$\varepsilon_2 = 0.4$

For $n \geq 2 = N(\varepsilon_1)$

$|a_n - 0| < 0.8 = \varepsilon_1$

For $n \geq 3 = N(\varepsilon_2)$

$|a_n - a| \leq 0.4 = \varepsilon_2$

**Bsp.** Sei $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \geq 1$

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, - - -$

Dann gilt $\lim \frac{n}{n+1} = 1.$

**Beweis**: z.z. $\forall \varepsilon > 0$
$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit
$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon.$

Sei $\varepsilon > 0$, nach Arch. prinz.
gibt es $N = N_\varepsilon$ so dass
$$\frac{1}{N+1} < \varepsilon$$

Dann folgt $\forall n > N_\varepsilon = N$

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$$

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right|$$
$$= \left|\frac{1}{n+1}\right| < \frac{1}{N+1} < \varepsilon$$
$\forall n > N.$

**Bmk.** Nicht alle Folgen sind konvergent

Bsp. 1) $(a_n) = (-1)^n$.

$-1, 1, -1, \ldots$

$(-1)^n$ hat kein Grenzwert.

Für jedes $L \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$

~~$|a_n|$~~

$2 = |a_n - a_{n+1}| \cancel{\leq} |a_n - L + L - a_{n+1}|$

$\leq |a_n - L| + |a_{n+1} - L|$

Falls eine Grenzwert $L$ existiert, für gegeben $\varepsilon > 0$

(insbesondere $\varepsilon = \frac{1}{2}$), $\exists\, N_\varepsilon$

so dass $|a_n - L| < \frac{1}{2}$ $\forall n > N_\varepsilon$

$2 = |a_n - a_{n+1}|$

$\leq \underbrace{|a_n - L|}_{< \frac{1}{2}} + \underbrace{|a_{n+1} - L|}_{\frac{1}{2}} = 1$

$2 \leq 1$ ↯.

2) $a_n = n$

$a_n$ divergiert

$a_n$ ist divergent

$\lim a_n$ existiert nicht

$\lim a_n = \infty$

**Defn** 1) Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst beschränkt falls die Menge der Folgenglieder $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

2) Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst Nullfolge, falls $\lim a_n = 0$.

**Bmk.** Jede konvergente Folge ist beschränkt.

**Beweis**: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge mit $\lim a_n = L$

Dann für jede $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ so dass

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Insbesondere $\varepsilon = 1$

Dann $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, so dass.

$$|a_n - L| < 1 \quad \forall n > N_1$$

d.h. $a_n \in \,]L-1, L+1[$ $\forall n > N$.

$$\{a_N, a_{N+1}, \dots\} \subset \,]L-1; L+1[$$

~~aber Also~~

d.h.

$\{a_N, a_{N+1}, \dots\}$

ist beschränkt.

aber $\{a_1, a_2, \dots a_{N-1}\}$

ist endlich und

auch beschränkt.

d.h. konvergent $\Rightarrow$ beschränkt

beschränkt $\not\Rightarrow$ konvergent ?

z.B. $(-1)^n$ ist ~~konv.~~ beschränkt aber nicht konv.

<u>Satz.</u> Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen

mit $\lim a_n = a$

$\lim b_n = b$.

1) Dann ist $(a_n \pm b_n)_{n\geq 1}$ konvergent ~~[illegible]~~ und

$$\lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n.$$

2) Dann ist $(a_n b_n)_{n\geq 1}$ konv.

und $\lim a_n b_n = (\lim a_n)(\lim b_n)$

3) Falls $b_n \neq 0$ $\forall n \geq 1$ und

$b \neq 0$, dann ist

AV

$\frac{a_n}{b_n}$ konv und

$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b}.$$

4) Falls es ein $K \geq 1$ gibt

mit $a_n \leq b_n \quad \forall n > K$

dann folgt $a \leq b$.

<u>Bsp.</u> $b \in \mathbb{Z}$

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^b = 1.$$

Wir haben schon gesehen

$\lim \frac{1}{n} = 0$, $\lim 1 = 1$

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+0 = 1$$

$b > 0$. (z.B $b = 2$

$$\underbrace{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}_{\downarrow\, 1} = \lim \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\downarrow\, 1}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\downarrow\, 1}.$$

$b < 0$, dann können wir

3) benutzen.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2} = \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\downarrow\, 1}} \cdot \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\downarrow\, 1}} = 1$$

**Bsp** $a_n = \frac{n^2 - 2n}{n^2 + n + 1}$

$$\frac{\cancel{n^2}\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{\cancel{n^2}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1 - \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

Da $\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0$.

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \to 1$$

$$1 - \frac{2}{n} \to 1.$$

$$a_n \to 1.$$

**Beweis** 1) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

z.z. $\lim (a_n + b_n) = a + b$.

Was wir wissen?

1) $\lim a_n = a$

2) $\lim b_n = b$

d.h. 1) Für die gegebene $\varepsilon > 0$

$\exists N_{\varepsilon/2}$ so dass $\forall n > N_{\varepsilon/2}$

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

2) $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > M_{\varepsilon/2}$

~~$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$~~

Für $n > N := \max\{N_{\varepsilon/2}, M_{\varepsilon/2}\}$

Dann für $n > \tilde{N}$

$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ , $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

Aber dann . für $n > \tilde{N}$, gilt

$$|(a_n + b_n) - (a+b)|$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Wir haben gezeigt dass für die gegebene $\varepsilon > 0$ $\exists\ \tilde{N}$ so dass $\forall n > \tilde{N}$

$$|(a_n + b_n) - (a+b)| < \varepsilon.$$

d.h. $\underline{\lim a_n + b_n = a + b}$ $\blacksquare$

<u>Satz</u>: (<u>Einschliessungs Kriterium</u>)
("Sandwich" thm)

Seien $(a_n)$, $(b_n)$ 2 konvergente Folgen mit demselben Grenzwert $L \in \mathbb{R}$

Ist $k \in \mathbb{N}$ und ist $(c_n)$ eine Folge mit der Eigenschaft

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \text{für jede } n > k$$

dann konvergiert $c_n$ gegen $L$.

**Beweis** zu 1 gegeben $\varepsilon > 0$

gibt es ein Index $N_1 \geq k$ so dass für jedes $n \geq N_1$ beide Ungleichungen

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad , \quad |b_n - L| < \varepsilon$$

erfüllt sind.

Dann
$$-\varepsilon < a_n - L \leq c_n - L \leq b_n - L < \varepsilon$$

für $n > N_1$

Insbesondere $-\varepsilon < c_n - L < \varepsilon$

$$\Rightarrow |c_n - L| < \varepsilon \quad \forall n > N_1$$

**Bsp.** $c_n = \dfrac{\sin n}{n}$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$-\frac{1}{n} \to 0$, $\quad \frac{1}{n} \to 0$

$\frac{\sin n}{n} \xrightarrow{\text{Nach Einsch. setz}} 0$.

**Bmk.** Divergente

Folgen können verschiedene Verhältnis haben

z.B $a_n = (-1)^n$. beschränkt

$b_n = n$. unbeschränkt.

Man "kann sagen" $b_n = n$ "divergiert gegen $+\infty$."

Man sagt eine Folge gegen $\infty$ divergiert, falls es zu jedem $T > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ gibt so dass $a_n > T$ für jedes $n > N_0$.

---

## § 2.2. Der Satz von Weierstrass und ~~Anderungen~~ Anwendungen.

**Bmk.** $c_n$ konv $\Rightarrow$ $c_n$ ist beschränkt

$a_n$ ist beschränkt $\not\Rightarrow$ $a_n$ konv.

z.B $(-1)^n$

**Defn.** 1) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist **monotone wachsend** falls $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \geq 1$

2) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist **monotone fallend** falls $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \geq 1$.

**Satz** 2.2 (Weierstrass) (Monotone Konvergenz Satz).

- Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monotone wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert $\lim a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$.

- Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mon. fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert $\lim a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$.

**Bmk**

$\left\{ \begin{array}{c} \text{beschränkt} \\ + \\ \text{monotone} \end{array} \right\} \Longrightarrow$ konvergenz