17.3.22

Grenzwert einer Folge

Satz: • $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert $\Rightarrow$ $(a_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt

• Falls $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$,
$c_n := a_n \pm b$, dann gilt
$$\lim c_n = \lim (a_n \pm b_n) = a \mp b$$

• Falls $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, dann gilt $\lim (a_n b_n) = ab$

• Falls $b_n \neq 0 \ \forall n \geq 1$, und $b \neq 0$ dann ist $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$

• Falls $a_n \leq b_n \ \forall n \geq K$, dann folgt $a \leq b$.

• Falls $\lim a_n = \lim b_n = L$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$, dann konvergiert $(c_n)_{n\geq 1}$ und $\lim c_n = L$.

Bsp. • $\lim \frac{1}{n} = 0$

• $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^b = 1$, $b \in \mathbb{Z}$.

Bmk $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt $\not\Rightarrow$ (a_n) konv.

Bsp: $a_n = (-1)^n$

Aber

Satz (Weierstrass) (monotone Konvergenz Satz)

• Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monotone wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert $\lim a_n = \sup \{a_n : n \geq 1\}$.

• Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mon. fallend und nach unden beschränkt. Dann konvergiert (a_n) und $\lim a_n = \inf \{a_n : n \geq 1\}$

1/

Clicker Frage.

$$a_n \leq c_n \leq b_n, \quad \forall n \geq 1$$

- $a_n = 1 \qquad b_n = 2$

  $$c_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = \text{gerade} \\ 2 & \text{falls } n = \text{ungerade.} \end{cases}$$

  divergent

- $a_n = 1 \qquad b_n = 2$

  $c_n = 1 \qquad$ konvergent.

Bsp. Sei $a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq q < 1$. Dann gilt
$$\lim n^a q^n = 0.$$

Bmk. $r := \frac{1}{q} > 1$ $q \neq 0$

$$n^a q^n = \frac{n^a}{r^n} \longrightarrow 0$$

Exponential Funktion r^n wächst schneller als jede Potenz n^a.

Beweis: Wir können annehmen dass $q \neq 0$
Andernfalls $x_n = n^a q^n = 0$
$\lim x_n = 0$.

Sei $x_n := n^a q^n$

Zuerst zeigen wir dass x_n mon. fallend ist.

$$x_{n+1} = (n+1)^a \cdot \left(q^{n+1}\right)$$

$$= \frac{(n+1)^a}{n^a} \cdot \underbrace{n^a \cdot q^n}_{x_n} \cdot q.$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^a q \cdot x_n.$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^a q \, x_n.$$

Da $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^a = 1$, gibt es ein n_0 so dass für $n > n_0$, gilt:
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - 1 < \frac{1}{q} - 1$$

$\Big(\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^a = 1 \iff \forall \varepsilon > 0$

$\exists n_0$ s.d.

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - 1 < \varepsilon$

für $n > n_0 \Big)$.

Insbesondere wir können als

$\varepsilon = \frac{1}{q} - 1 > 0,$

und erhalten

$$(*) \quad \boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a < \frac{1}{q} \quad \forall n > n_0.}$$

Anderseits $x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^a q \cdot x^n.$

Mit (*) erhalten wir

$$x_{n+1} < x^n \quad \forall n > n_0.$$

$\Rightarrow (x_n)$ ist mon. fallend.

Da $x_n > 0 \quad \forall n \geq 1$,

ist die Folge auch nach unten beschränkt.

$\xRightarrow[\text{Satz}]{\text{mon. konv.}}$ x_n ist konvergent.

Sei $L := \lim x_n = \lim x_{n+1}$

$$= \lim \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^a \cdot q \, x_n \right)$$

$$= \underbrace{\left(\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^a\right)}_{1} \underbrace{\left(\lim q\right)}_{q} \underbrace{\left(\lim x_n\right)}_{L}.$$

$L = qL, \quad q \neq 0.$

$\Rightarrow L = 0.$

Bmk. Wir haben die folgende einfache Tatsache benützt.

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konv. Folge mit $\lim a_n = a$

Sei $k \in \mathbb{N}$, Dann ist durch

$b_n := a_{n+k}$ $n \geq 1$ definierte Folge auch konvergent

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

Beweis (Mon. konv. Satz).

Sei $(a_n) \nearrow$ mon. wachsend. und nach oben beschränkt.

Sei $S := \sup\{a_n : n \geq 1\}$.

z.z. $\lim a_n = S$

z.z.: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ so dass

$\forall n > N$: $|a_n - S| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

$S - \varepsilon$ ist kein obere Schranke da S die kleinste ob. Sch ist.

Woraus folgt

gibt es $N \geq 1$

mit $s - \varepsilon < a_N$

Insbesondere für $n \geq N$

$$s - \varepsilon \leq a_N \leq a_n \leq s$$

$s = \sup(a_n)$

Da a_n monoton wachsend ist

Wir haben für $n \geq N$

$$s - \varepsilon \leq a_n \leq s \leq s + \varepsilon.$$

$$\Rightarrow |a_n - s| < \varepsilon \quad \forall n > N.$$

$$\Rightarrow \lim a_n = s$$

$\boxtimes$

$a \in \mathbb{R}$

Bsp. $\lim n^a q^n = 0 \quad 0 < q < 1$

Insbesondere $x_n := q^n \quad 0 < q < 1$

$$\lim x_n = 0.$$

Die Folge $x_n := q^n$ heisst die geometrische Folge.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = q \quad \forall n.$$

Bsp. $a_n := n^{1/n}$. Dann gilt $\lim a_n = 1$.

Beweis. Zuerst zeigen wir

(i) $n^{1/n} \geq 1$ falls $n \geq 1$

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$
gilt die folgende Identität.

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots + \dots + a^{n-1}).$$

Mit $a=1$, $b=n^{1/n}$ folgt

$$(b^n - a^n) = \underbrace{(n-1)}_{\geq 0} = (n^{1/n}-1)\underbrace{(n^{\frac{n-1}{n}} + \dots + \, + 1)}_{\geq 0},$$

$n \geq 1$

$$n^{1/n} - 1 \geq 0 \implies n^{1/n} \geq 1$$

<u>z.z.</u> $\lim n^{1/n} = 1$

<u>d.h</u> $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ so dass $\forall n \geq N$
$|n^{1/n} - 1| < \varepsilon$.

$$-\varepsilon \leq n^{1/n} - 1 \leq \varepsilon$$

$$1 - \varepsilon \leq n^{1/n} \leq \varepsilon + 1 \quad , \forall n > N$$

?

$$1 - \varepsilon < 1 \leq n^{1/n}$$

Wir haben schon gesehen dass.
$\lim n^a q^n = 0.$
Wir wenden diese mit $a=1$
$q = 1/(1+\varepsilon)$
und erhalten $\lim \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0.$

Insbesondere gibt es $N \in \mathbb{N}$
s.d. $\frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1 \quad \forall n \geq N.$

Also für $n \geq N$

$$n < (1+\varepsilon)^n.$$

Nochmals wenden wir die Identität

$$(b^n - a^n) = (b-a)(\cdots).$$

mit $b = (1+\varepsilon)$, $a = n^{1/n}$

$$\underbrace{((1+\varepsilon)^n - n)}_{>0} = (1+\varepsilon - n^{1/n})\underbrace{((1+\varepsilon)^{n-1} + \cdots + n^{\frac{n-1}{n}})}_{>0}$$

$$\Rightarrow (1+\varepsilon) - n^{1/n} > 0.$$

$$\Rightarrow n^{1/n} < 1+\varepsilon$$

$$\Rightarrow$$

$$1-\varepsilon < 1 < n^{1/n} < 1+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim n^{1/n} = 1.$$

$\boxtimes$.

Bsp. Die Folge $(1+\frac{1}{n})^n$, $n \geq 1$

konvergiert. Der Limes ist Eulersche Zahl

$$e := \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ 2.71828\ldots \end{array}$$

Ich habe 1CHF. 100% Zins.

$(1+1)^1 = 2.$ nach 1 Jahr.

Wenn zweimal im Jahr aufgezinst werde, dann habe ich

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$$

jeden Monat $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = \ldots$

jeden Tag $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} \overset{?}{=} 2.717\ldots$

$\downarrow$

2.71828

Um zu zeigen dass

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existiert,

brauchen wir die Folgende

Lemma (Bernoulli Ungleichung)

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x > -1$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Beweis: Induktion

Übung.

Sei $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)$

Wir werden zeigen dass a_n mon. fallend und nach unten beschränkt

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

$$= \frac{n^n}{(n-1)^n} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{(n^2)^n \cdot n}{\left((n-1)(n+1)\right)^n \cdot (n+1)}$$

$$= \frac{n^{2n} \cdot n}{(n^2-1)^n \cdot (n+1)} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$\geq \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$\downarrow$

Bernoulli Ungleichg.

$(1+x)^n > 1+nx$

$x=\frac{1}{n^2-1}$

$$\geq \left(1+\frac{n}{n^2}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$\downarrow$

$n^2 > n^2-1$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$=1$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n-1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n-1} > a_n$$

$\Rightarrow$ a_n mon. fallend.

a_n ist auch nach beschränkt

Mit mon. konv. Satz kann man folgen dass $\lim a_n$ existiert. $\square$

Bsp. Sei $c>1$.

Sei a_n rekursive definiert wie folgt

$$a_1 = c$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right), \quad n \geq 1$$

Wir werden zeigen dass $\lim a_n$ existiert und sei $\lim a_n = a$ dann gilt $a^2 = c$.

d.h. Diese Bsp gibt die Bestimmung der positiven Quadratwurzel $\sqrt{c}$ einer reelle Zahl $c>0$.

Wir werden mon. Konv.
Satz benutzen.

Behauptung 1: $a_{n+1}^2 \geq c$

$\forall n \geq 1$

Aus $a_{n+1}^2 > c > 1$

folgt dass $a_n \geq 1$

$\forall n \geq 1$, d.h.

a_n ist nach unten
beschränkt.

Beweis:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_n^2 + c}{a_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2a_n}\left[2a_n^2 - a_n^2 + c\right]$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{c - a_n^2}{2a_n}$$

$$(a_{n+1})^2 = \left(a_n + \frac{c - a_n^2}{2a_n}\right)^2$$

$$= a_n^2 + (c - a_n^2) + \left(\frac{c - a_n^2}{2a_n}\right)^2$$

$$= c + \frac{(c - a_n^2)^2}{4a_n^2} \geq c$$

$\blacksquare$

Behauptung 2 a_n ist mon. fallend.

$a_{n+1} \leq a_n$

Wegen $a_n^2 \geq c$ gilt

$$a_{n+1} = a_n + \underbrace{\frac{c - a_n^2}{2a_n}}_{\leq 0}$$

$\Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$.

a_n ist nach unten beschränkt + mon fallend $\xRightarrow[\text{mon. konv satz}]{}$ $\lim a_n$ existiert.

Sei $\lim a_n = a$.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$$

Da $a_n \geq 1$, $a \geq 1$

$$\lim a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim a_n + \frac{c}{\lim a_n}\right)$$

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right)$$

$$2a = \frac{a^2 + c}{a}$$

$\Rightarrow 2a^2 = a^2 + c \Rightarrow \boxed{a^2 = c}$

Bmk. Diese rekursive Folge ergibt sich aus einer "Fixpunktiteration".

$\sqrt{c}$ ist die Lösung der Gleichung

$$x^2 = c$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 = \frac{c}{2} + \frac{c}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{c}{2}$$

$$x = \frac{x}{2} + \frac{c}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right)$$

Sei $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right)$

~~Die~~ d.h.

$$x = f(x)$$

Diese Gleichung heisst eine "Fixpunktgleichung" für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right)$$

Wir untersuchen die Konvergenz der zugehörigen Fixpunktiteration

$$x_{n+1} := f(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$$

In[3]:= `Plot[{(1 / 2) (x + (2 / x)), x}, {x, -4, 4}]`

Out[3]=