9.3.22

Satz (Monotone Konvergenz)

- Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monotone wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert $\lim a_n = \sup\{a_n : n\geq 1\}$.

- Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monotone fallend und nach unten beschränkt. Dann konver. $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert $\lim a_n = \inf\{a_n : n\geq 1\}$.

Bsp. • $\lim\limits_{n\to\infty} n^a q^n = 0$, $0\leq q<1$, $a\in\mathbb{Z}$.

Insbesondere: für

- $a_n = q^n$, $0\leq q<1$

  $\lim a_n = 0$

  (Geometrische Folge)

  $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \ \forall n\geq 1\right)$

- $\lim n^{1/n} = 1$

- $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

- Sei $a_1 = c$, $c>1$

  $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$, $n\geq 1$.

  Dann gilt

  $\lim a_n = \sqrt{c}$.

§2.3 Limes Superior und Limes Inferior.

($\limsup$, $\liminf$).

Sei (a_n) eine beschränkte Folge (nicht muss monotone sein).

Eine wichtige Anwendung des Satzes von Weierstraß ist, wie man mit jeder beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ zwei monotone Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ definieren kann, welche konvergieren.

Sei $n \geq 1$. Für jedes n definiere

$$b_n := \inf\{a_k : k \geq n\} = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}.$$

$$c_n := \sup\{a_k ; k \geq n\} = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}.$$

Erinnern wir uns: Seien $A \subset B \subset \mathbb{R}$ Teilmengen

- Falls B nach oben besch. ist, $\sup A \leq \sup B$
- Falls B nach unten beschränkt ist, $\inf B \leq \inf A$

1/

Für jedes n, ist die Menge

$$A_n := \{a_k : k \geq n\}$$
$$= \{a_n, a_{n+1} \dots\} \subset \{a_1, \dots\}$$

auch beschränkt und gilt

$$A_{n+1} \subset A_n = \{a_n, a_{n+1} \dots$$
$$\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$$

- $\boxed{b_n = \operatorname{Inf} A_n \leq \sup A_n = c_n}$
- $\operatorname{Inf} A_n \leq \operatorname{Inf} A_{n+1}$

  $\boxed{b_n \leq b_{n+1}}$ d.h $b_n \nearrow$
- $\sup A_{n+1} \leq \sup A_n$

  $\boxed{c_{n+1} \leq c_n}$ d.h $c_n \searrow$

Die beide Folgen b_n, c_n monotone, beschränkt

Nach mon. konv. satz konvergent beide Folgen.

Wir definieren $\boxed{\lim_{n\to\infty} b_n := \liminf a_n}$

limes inferior von a_n.

$\boxed{\lim c_n := \limsup a_n}$

limes superior von a_n.

Bmk Es gilt immer

$\liminf a_n \leq \limsup a_n$

da $b_n \leq c_n$ ist.

Bsp. $a_n = (-1)^n$

$$A_n = \begin{cases} \{1, -1, 1, -1, \ldots\}. & n = \text{gerade} \\ \{-1, 1, -1, \ldots\}. & n = \text{ungerade}. \end{cases}$$

$b_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$

$= \inf\{(-1)^n, (-1)^{n+1}, \ldots\}.$

$= -1$

$b_n = -1$ konstante Folge

$c_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$

$\sup\{(-1)^k, \ldots\} = 1$

$c_n = 1$ konst. Folge.

$\lim b_n = \liminf a_n = -1$

$\lim c_n = \limsup a_n = 1.$

$\limsup a_n \neq \liminf a_n$

$\lim a_n$ existiert nicht!

Lemma. $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert

genau dann wenn

$(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist

und $\liminf a_n = \limsup a_n$.

Beweis: $(\Leftarrow)$ $b_n := \inf\{a_k : k \geq n\}$

$c_n := \sup\{a_k : k \geq n\}.$

$b_n \leq a_n \leq c_n.$

Unsere annahme $\lim b_n = \liminf a_n$
$\qquad \|$
$\lim c_n = \limsup a_n$.

Nach Sandwich satz

$\lim a_n$ existiert
$\qquad \|$
$\liminf a_n = \limsup a_n$,

($\Rightarrow$) Wir wissen schon dass a_n konv $\Rightarrow$ a_n ist beschränkt.

Sei $\lim a_n = a$. Dann gilt: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \underline{N}$ so dass $\forall n \geq N$, $|a_n - a| < \varepsilon$

$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad , n \geq N.$

$b_N := \inf\{a_N, a_{N+1} \dots\}$.

und $a - \varepsilon < a_n \quad \forall n > N$

$\Downarrow$

$a - \varepsilon$ ist eine untere Schranke für $\{a_N, a_{N+1}, \dots\}$.

Da b_N die grösste untere Schranke für $\{a_N, a_{N+1} \dots\}$ ist, $a - \varepsilon \leq b_N$,

Analog $c_N = \sup\{a_N, \dots\}$

Aus $a_n < a + \varepsilon \quad , n \geq N$. folgt dass $a + \varepsilon$ ist eine obere Schranke für $\{a_N, a_{N+1} \dots\}$

Da c_N kleinste obere Schranke für $\{a_N, \dots\}$ ist,

$$c_N \le a + \varepsilon$$

$$a - \varepsilon \le b_N \le c_N \le a + \varepsilon \quad \forall n > N.$$

$$a - \varepsilon \le \lim b_N \le \lim c_N \le a + \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist folgt dass

$$a \le \liminf a_n \le \limsup a_n \le a$$

$$\Rightarrow a = \liminf a_n = \limsup a_n.$$

$\boxtimes$

<u>Bsp.</u> $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

$= \{0, 1 + \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{3}, \dots\}$

$b_1 = \inf\{a_1, a_2, \dots\}$
$= \inf\{0, 1 + \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{3}, \dots\}.$

$= -1$

$b_2 = \inf\{1 + \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{3}, \dots\}$

$= -1$

$\vdots$

$b_n = -1 \quad \forall n.$

$c_1 = \sup\{0, 1 + \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{3}, \dots\}.$

$= 1 + \frac{1}{2}$

$c_2 = \sup\{1 + \frac{1}{2}, \dots\} = 1 + \frac{1}{2}$

$c_3 = \sup\{-1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, \dots\} = 1 + \frac{1}{4}$

$c_4 = \sup\{1 + \frac{1}{4}, \dots\} \;//$

$$c_n = 1 + \frac{1}{2n_g} \qquad n_g \text{ gerade zahl}$$

$$\lim c_n = 1$$

$$\lim b_n = -1 \neq 1 = \lim c_n.$$

<u>Bsp</u>: $\boxed{a_n = 1 + \frac{1}{n}}$

$$b_1 = \inf\{1+\frac{1}{1}, 1+\frac{1}{2}, \cdots\}$$
$$= 1$$
$$b_2 = \inf\{1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, \cdots\}$$
$$= 1$$

$\vdots$

$$c_1 = \sup\{1+\frac{1}{1}, 1+\frac{1}{2}, \cdots\}$$
$$= 2$$
$$c_2 = \sup\{1+\frac{1}{2}, \cdots\} = 1+\frac{1}{2}$$

$$c_3 = \sup\{1+\frac{1}{3}, \cdots\}$$
$$= 1+\frac{1}{3}$$

$$c_n = 1 + \frac{1}{n}.$$

$$\lim c_n = 1$$
$$\lim b_n = 1.$$

---

§ 24. Das Cauchy Kriterium.

<u>Frage</u>: Kann man eine Kriterium für konvergenz finden so dass

(1) man keine hypothese über die Folge annimt.

(2) Man entscheiden kann ob die Folge konvergent ist ohne ihren Grenzwert zu kennen?

Antwort: Ja : Cauchy Kriterium.

Defn. Eine Folge (a_n) heisst Cauchy-Folge falls es ~~da~~ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt so dass für alle $m, n \geq n_0$ gilt $|a_n - a_m| < \varepsilon$

Satz: Cauchy Kriterium.

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen.

(a) Jede Cauchy Folge ist beschränkt

(b) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy Folge.

(c) Jede Cauchy Folge ist konvergent.

Bmk

Wir können den Cauchy kriterium in beiden Richtung anwenden.

d.h (a_n) ist nicht Cauchy $\Longrightarrow$ a_n ist divergent,

Bsp. Die Harmonische Reihe

Sei $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{11}{6}$

Nun zeigen wir dass $(a_n)_{n \geq 1}$ kein Cauchy Folge ist

$a_{2n} - a_n$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

$$\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

d.h $a_{2n} - a_n \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ a_n ist nicht Cauchy

$\Rightarrow$ a_n ist divergent.

Beweis (a). Sei (a_n) eine Cauchy Folge

Sei $\varepsilon > 0$, Sei n_0 so dass

$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0$.

Insbesondere

$|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon$ für jedes $n > n_0$.

Für eine solche n gilt

$|a_n| < |a_{n_0}| + \varepsilon, \; n \geq n_0$

Sei $S = \max \{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, |a_{n_0}| + \varepsilon\}$

Dann folgt $|a_n| < S$ für jede n.

$\Rightarrow a_n$ ist beschränkt.

(b) Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert A.

Sei $\varepsilon > 0$, Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$|a_n - A| < \varepsilon/2$

Für $m, n \geq n_0$.

$|a_m - a_n| = |a_m - A + A - a_n|$

$\leq |a_m - A| + |a_n - A|$

$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\Rightarrow$ ~~$a_m - a_n$~~ a_n ist cauchy.

/10

§ 2.5 Der Satz von Bolzano-Weierstrass

Bolzano-Weierstrass Satz sagt dass jede beschränkte Folge ~~b~~ eine konvergente Teilfolge besitzt!

Für den Satz von Bolzano-Weierstr benötigen wir den Begriff der Teilfolge eine Folge.

Defn Eine Teilfolge einer Folge $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist eine Folge $b: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ so dass eine streng monotone wachsende Abbildung $\ell: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt so dass

$$b = a \circ \ell$$

d.h $(b_n)_{n \geq 1}$ ist eine Folge $b_n = a_{\ell(n)}$

und $\ell(n) \underset{\neq}{<} \ell(n+1) \quad \forall n \geq 1$

Bmk. Eine Teilfolge ist eine Folge, die durch weglassen von Folgengliedern entsteht.

Folgenglieder weg, aber
auf eine Art und Weise
dass noch ~~von~~ unendlich
viele übrig bleiben.

$\cancel{a_1}, a_2, \cancel{a_3}, \cancel{a_4}, a_5, \ldots$

$a_2 \downarrow b_1$, $a_5 \downarrow b_2$

Bsp. $a_n = (-1)^n$

$a_n = \{-1, 1, -1, \ldots\}$

$b_n = a_{2n} = \{1, 1, \ldots\}$

$c_n = a_{2n+1} = \{-1, -1, \ldots\}$

$d_n = \{-1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, \ldots\}$