$(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert $\Rightarrow$ (a_n) ist beschränkt

$(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt $\not\Rightarrow$ (a_n) konvergent

Bsp: $(-1)^n$.

Satz (Mon. Konvergenz Satz)

(a_n) ist beschränkt und monotone

$\Rightarrow$ (a_n) konvergent.

$\liminf a_n$, $\limsup a_n$

Mit jeder beschränkten Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ (muss nicht monotone sein) kann man zwei monotone, konv. Folgen (b_n), (c_n) definieren.

$$A_n := \{a_k : k \geq n\} = \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$$

Dann $A_{n+1} \subset A_n$. A_n ist beschränkt

Seien $b_n := \operatorname{Inf} A_n$

$c_n := \operatorname{Sup} A_n$

Dann ist $(b_n)_{n\geq 1}$ mon. $\nearrow$, beschränkt

und $(c_n)_{n\geq 1}$ mon $\searrow$, beschränkt

$\liminf a_n := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ $\qquad$ $\limsup a_n := \lim c_n$

Satz $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert

$\Leftrightarrow$ $(a_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt

und $\liminf a_n = \limsup a_n$

Bmk Gilt immer das:

$$b_n \leq a_n \leq c_n$$

$$\liminf a_n \leq \limsup a_n.$$

Defn Eine Folge heisst Cauchy Folge falls es zu jedem $\varepsilon > 0$, ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so dass für alle $m, n \geq N$ gilt $|a_n - a_m| < \varepsilon$

Satz (Cauchy Kriterium)
Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von reelle Zahlen.
1) Jede Cauchy Folge ist beschrankt
2) (a_n) konv. $\Rightarrow$ (a_n) Cauchy
3) (a_n) Cauchy $\Rightarrow$ (a_n) konv.

d.h Für $(a_n)_{n\geq 1}$ reelle Folgen

(a_n) konv $\Leftrightarrow$ a_n Cauchy

Bsp. $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Die Harmonische Reihe ist nicht Cauchy, und daher nicht konvergent

§2.5 Der Satz von Bolzano Weierstrass

Defn Eine Teilfolge einer Folge $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist eine Folge $b: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ so dass eine streng monotone wachsende Abbildung $\ell: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt so dass $b = a \circ \ell$ gilt.

d.h. $(b_n)_{n\geq 1}$ ist eine Folge

wobei $b_n = a_{\ell(n)}$ und $\ell(n) \underset{\neq}{<} \ell(n+1)$ $\forall n \geq 1$

- Eine Teilfolge entsteht durch weglassen von Folgengliedern.

- Eine Teilfolge b_n entsteht durch weglassen von Folgengliedern von a_n. Aber man lässt Folgengliedern weg auf eine Art und Weise dass noch unendlich viele übrig bleiben.

Bsp $a_n = (-1)^n$

$(b_n) = \{1, 1, \ldots\}$ $\quad \ell : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \to 2n$

$(c_n) = \{-1, -1, \ldots\}$

$(d_n) = \{-1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, \ldots\}$

$(b_n), (c_n), (d_n)$ sind verschieden Teilfolgen von (a_n).

Satz (Bolzano-Weierstrass)

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

d.h. Unabhängig davon wie "zufällig" die Folge ist, solange sie beschränkt ist, muss ein "Teil" von ihr konvergieren.

Defn. Ein abgeschlossenes Interval ist eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ der Form

(1) $[a, b]$, $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$

(2) $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$

(3) $]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$

(4) $]-\infty, \infty[$.

Wir definieren die Länge $\mathcal{L}(I)$ des Intervals als $\mathcal{L}(I) = b - a$ im Fall (1)

$\mathcal{L}(I) = \infty$ in (2), (3), (4)

$\mathcal{L}(I) \geq 0$.

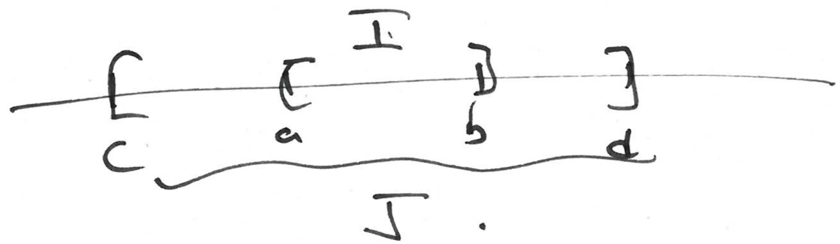
Cauchy-Cantor (Nested Intervals principle).
Intervalschachtelung Prinzip.

geht um mon. fallende Folgen von abgeschlossenen Intervale

Bmk. Seien $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ mit $a \leq b$, $c \leq d$.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Dann gilt $I \subset J$
$\iff c \leq a,\ b \leq d$.



Satz: (Cauchy - Cantor Lemma).

Sei $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \cdots$

eine absteigende Folge abgeschlossener Intervalle mit $\mathcal{L}(I_1) < \infty$

Dann gilt $\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset$

Falls zudem $\lim_{n \to \infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$,

so ~~besitzt~~ besteht der Schnitt aus genau einem Punkt!

Also $\bigcap I_n = \{x\}$

Bmk. 1) Die Voraussetzung, dass die Längen endlich sein sollen ist wichtig!

$I_n = [n, \infty[$

$\bigcap I_n = \emptyset.$

2) Die Voraussetzung, dass die Intervalle abgeschlossen sein sollen ist wichtig!

$I_n =]0, \frac{1}{n}]$, $n \geq 1$

$\bigcap I_n = \emptyset.$

Beweis.

Sei $I_n = [a_n, b_n]$

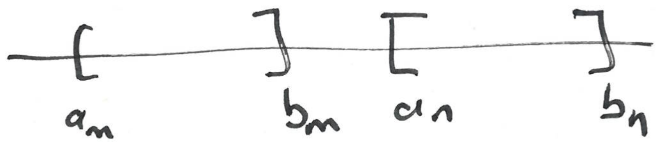
$I_m = [a_m, b_m]$

wobei $m \geq 1$, $n \geq 1$.

Behauptung: $a_n \leq b_m$ $\forall n \geq 1$, $\forall m \geq 1$.

Beweis: (Behauptung). Sonst gibt es $n \geq 1$, $m \geq 1$ mit

$b_m < a_n$.



Dann würde $[a_m, b_m] \cap [a_n, b_n] = \emptyset$

Das kann nicht sein da entweder $I_n \subset I_m$ oder $I_n \subset I_m$.

Seien $A = \{a_n : n \geq 1\} \neq \emptyset$

$B = \{b_m : n \geq 1\} \neq \emptyset$

Dann erfüllen A und B die Voraussetzungen des Vollständigkeitsaxiom

$\forall a_n \in A$, $b_n \in B$, $a_n \leq b_n$.

Deswegen gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq c \leq b_n$ $\forall n \geq 1$.

d.h. $c \in [a_n, b_n] = I_n$ $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow c \in \bigcap I_n$

$\Rightarrow \bigcap I_n \neq \emptyset.$

Wir bemerken

$[a_{n+1}, b_{n+1}] = I_{n+1} \subset I_n = [a_n, b_n]$

$0 \leq \ell(I_{n+1}) = b_{n+1} - a_{n+1}$

$\leq b_n - a_n = \ell(I_n) < \infty.$

d.h. $\ell(I_n)$ ist eine mon. beschränkte Folge.

Mittels mon. konv. Satz folgt dass

$\lim_{n\to\infty} \ell(I_n)$ existiert.

$\lim_{n\to\infty} \ell(I_n) \geq 0.$

Falls $c_1, c_2 \in \bigcap I_n$ gibt, dann folgt

$[c_1, c_2] \subset I_n \quad \forall n \geq 1$

somit $0 < c_2 - c_1 \leq b_n - a_n = \ell(I_n) \neq 0$

Falls $\lim \ell(I_n) = 0$, gilt $c_2 - c_1 = 0$

$\Rightarrow c_1 = c_2.$

Satz Bolzano Weierstrass Satz.

Jede beschrankte Folge besitzt eine konvegte Teilfolge.

Beweis. Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ beschrankte Folge.

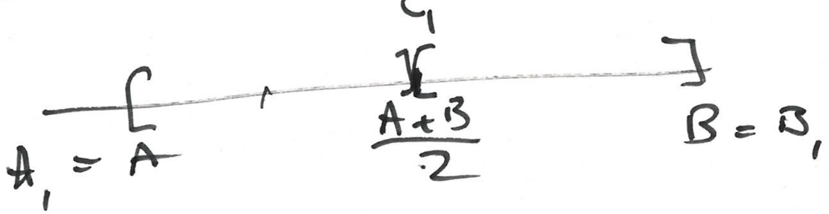
Dann gibt es ein Interval $[A, B]$ mit

$$a_n \in [A, B] \quad , \forall n \geq 1$$

Wir werden eine Intervalschachtelung definieren so dass jede Interval unendlich viele Folgenglieder hat.

Wir beginnen mit dem Interval $I_1 := [A, B]$
$:= [A_1, B_1]$

Und betrachten wir zwei Intervalle



$$\left[A_1, \frac{A+B}{2}\right], \quad [C_1, B_1].$$

$$\frac{A+B}{2} = C_1$$

Mindestens eine von diese 2 Intervale hat unendlich viele Folgenglieder.

Falls $[A_1, C_1]$ unendlich viele a_n hat, Dann gilt $I_2 = [A_1, C_1] \subset I_1$

Wir definieren induktiv.

$I = I_1 \supset I_2 \supset I_3 \ldots$

eine mon. fallende Folge abgeschlossene Intervalle mit

1) $\mathcal{L}(I_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(I_n)$

$$= \frac{1}{2^2}\mathcal{L}(I_{n-1})$$

$$= \ldots = \frac{1}{2^n}\mathcal{L}(I_1)$$

$$= \frac{B-A}{2^n}.$$

2) $E_n := \{ k \in \mathbb{N} : a_k \in I_n \}$ ist unendlich.

Algorithm:

$A_1 := A$

$B_1 := B.$

For $n = 1, 2, \ldots$

$C_n := \frac{A_n + B_n}{2}$

If $E_n = \{k : a_k \in [A_n, C_n]\}$ unendlich

then $A_{n+1} := A_n$

$B_{n+1} := C_n$

Else $A_{n+1} := C_n$ $B_{n+1} := B_n$

~~Nach~~ Cauchy-Cantor

$\bigcap I_n \neq \emptyset.$

$\ell(I_n) = \frac{B - A}{2^{n-1}} \to 0$

d.h. $\bigcap I_n = \{c\}$ ein Punkt.

OK Aber wo ist die Teilfolge?

Nun, definieren wir die Teilfolge

Wir nehmen als

$$a_{\ell(1)} := a_1 \in I_1 = [A, B]$$

d.h setze $\ell(1) = 1$.

Da noch unendlich viele Folgenglieder in $I_2 = [A_2, B_2]$ gibt, wähle eine Index $\ell(2) > \ell(1) = 1$ mit

$$a_{\ell(2)} \in I_2 .$$

Es gibt noch unendlich viele Folgenglieder in $I_3 = [A_3, B_3]$. wähle ein Index $\ell(3) > \ell(2) > \ell(1)$ mit $a_{\ell(3)} \in I_3$.

~~Um~~ Dasselbe Argument liefert den Schnitt von n auf $n+1$

Wir erhalten eine Abbildung $\ell : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\ell(n+1) > \ell(n)$ $\forall n \geq 1$

und $a_{\ell(n)} \in I_n$.

Da $a_{\ell(n)} \in I_n$

$\{c\} = \bigcap I_n \quad , c \in I_n$

$$|a_{\ell(n)} - c| \leq \delta(I_n) = \frac{1}{2^{n-1}}(B-A)$$

Daraus folgt dass

$$a_{\ell(n)} \to c.$$

$$-\frac{1}{2^{n-1}}(B-A) < a_{\ell(n)} - c < \frac{1}{2^{n-1}}(B-A)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad \text{Sandwich Satz} \qquad 0$$

$$a_{\ell(n)} - c \to 0$$

Bmk. 1) Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Dann gilt für jede konvergente Teilfolge $(b_n)_{n \geq 1}$

$$\liminf a_n \leq \lim b_n \leq \limsup a_n.$$

Bmk. Falls (a_n) eine konv. Folge ist, Dann ist jede Teilfolge konvergent und falls $\lim a_n = L$, (b_n) eine Teilfolge, dann $\lim b_n = L$

2) Es gibt auch zwei Teilfolgen von $(a_n)_{n\geq 1}$ die $\liminf a_n$ und bzw $\limsup a_n$ als Grenzwert annehmen.

§ 2.6 Folge in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

Die Theorie der Folgen in $\mathbb{R}$, der Konvergenz Begriff usw lassen sich leicht auf Folgen in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}$ übertragen.

<u>Defn</u> Eine Folge in $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

ist eine Abbildung

Wir schreiben a_n statt $a(n)$

Sei $\|\cdot\|$, die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$ (oder $\mathbb{C}$).

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$$

$$x = (x_1, \dots x_d) \in \mathbb{R}^d$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$$

$$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Defn: Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}^d$

$a_n = (a_{n,1}, \dots a_{n,d})$

heisst **beschränkt**

falls es $C > 0$ gibt mit $\|a_n\| \leq C \quad \forall n \geq 1$

Defn Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}^d$ **konvergiert** falls es $a \in \mathbb{R}^d$ gibt so dass für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $N \geq 1$ gibt so dass $\forall n \geq N$

$\|a_n - a\| < \varepsilon$

Falls solch ein a existiert, ist es eindeutig bestimmt und nennt sich Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$, $\lim a_n = a$.

Bmk: $a_n \to a$ heisst $\lim\limits_{n \to \infty} \|a_n - a\| = 0$.

Satz Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}^d$

Sei $b = (b_1, \dots b_d)$

Folgende Aussagen sind äquivalent.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,j} = b_j \quad \forall\ 1 \leq j \leq d.$

Bsp. 1) Sei

$$a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \in \mathbb{R}^2$$

$$\lim a_n = (0, 0)$$

$$a_{n,1} := \frac{1}{n} \qquad a_{n,2} := \frac{2}{n}$$

2) Sei $a_n = \left(\frac{n^2+n}{n^2+1}, 1, n\right)$

$$\left(\underbrace{\frac{n^2+n}{n^2+1}}_{a_{n,1}}, \underbrace{1}_{a_{n,2}}, \underbrace{n}_{a_{n,3}}\right)$$

Dann ist a_n divergent

da $a_{n,3} = n$ eine divergente Folge in $\mathbb{R}$ ist.

3) $z_n = \underbrace{\frac{n^2+5}{n^3+1}}_{\to 0} + i \underbrace{\frac{n^2+2}{n^2+1}}_{\to 1} \in \mathbb{C}$

$$z_n \longrightarrow 0 + i\,1 = i$$

Satz. 1) Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ konvergiert genau dann wenn sie eine Cauchy Folge ist

Cauchy heisst:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ so dass

$\| a_n - a_m \| < \varepsilon \quad \forall n, m > N$.

2) Jede beschränkte Folge ~~mit eine~~ hat eine konvergente Teilfolge.

(Bolzano-Weierstrass)..

/16p