16-3-22

Satz: (Bolzano-Weierstrass)

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge

Bmk. Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Dann gilt für jede konvergente Teilfolge (b_n)

$$\liminf a_n \leq \lim b_n \leq \limsup a_n$$

- Jede Teilfolge (b_n) einer konvergenter Folge (a_n) ist auch konvergent, und $\lim b_n = \lim a_n$.

Folgen in $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$

Sei $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$.

Defn

- (a_n) heisst beschränkt falls es $C>0$ gibt mit $\|a_n\| \leq C$, $\forall n \geq 1$.

$$\|a_n\| = \|(a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,d})\| = \left(a_{n,1}^2 + \dots a_{n,d}^2\right)^{1/2}$$

- $(a_n) \subset \mathbb{R}^d$ konvergiert falls es $a \in \mathbb{R}^d$ gibt s.d. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \geq 1$ s.d $\forall n \geq N$ $\|a_n - a\| < \varepsilon$

Satz Seien $(a_n) = ((a_{n,1}, \dots, a_{n,d})) \subset \mathbb{R}^d$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$, und $b = (b_1, \dots, b_d)$.

Folgende Aussagen sind äquivalent.

1) $\lim a_n = b$

2) $\lim a_{n,j} = b_j \quad \forall \quad 1 \leq j \leq d$.

Satz 1) Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^d$ konvergiert genau dann wenn sie eine Cauchy Folge ist.

Cauchy: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; N > 0$ so dass

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon \quad \forall \, n, m > N.$$

2) Jede beschränkte Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}^d$ hat eine konvergente Teilfolge.

(Bolzano Weierstrass)

Satz Seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen in $\mathbb{R}^d$ mit $\lim a_n = a$ und $\lim b_n = b$.

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1) $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$

2) $\lim (\lambda a_n) = \lambda \lim a_n$.

Bmk: Menge aller konvergente Folgen ist ein Vektorraum.

Für $\mathbb{C}$, haben wir

Satz Sei (z_n), $(w_n) \in \mathbb{C}$ mit $\lim z_n = z$, $\lim w_n = w$

Dann gilt

1) $\bar{z}_n \to \bar{z}$

2) $\|z_n\| \to \|z\|$

3) $z_n w_n \to zw$

4) Falls $w \neq 0$, $w_n \neq 0 \ \forall n$

So konvergiert $\frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w}$.

§2.7. Reihen (Series)

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

Mittels a_n definieren wir eine neue Folge; die Folge der Partialsummen

$$S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Defn. Eine Reihe ist eine unendliche Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots$$

einer Folge (a_n).

Defn. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert falls die Folge der Partialsummen $(S_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.

In diesem Fall wird deren Limes mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k =: \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Der Grenzwert heisst der Wert oder die Summe der Reihe

Bsp. Geometrische Reihe

$\|q\|$

Für $q \in \mathbb{C}$, $|q|<1$ betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1+q+q^2+\cdots$$

Für die Partialsummen haben wir

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1+q^1+q^2+\cdots+q^{n-1}$$

$$q S_n = \cancel{q}+\cancel{q^2}+\cdots+q^n$$

$$S_n = 1+\cancel{q}+\cancel{\cdots}+\cancel{q^{n-1}}$$

$$(1-q) S_n = 1-q^n.$$

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}(1-q^n).$$

$$\lim S_n = \frac{1}{1-q}\lim(1-q^n) = \frac{1}{1-q}.$$

da $\lim q^n = 0$, $|q|<1$.

Also für $|q|<1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Für $q=1$, $\sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$.

$S_n = n$, $\lim S_n = \infty$.

Für $q=-1$

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 \pm 1$$

S_n divergiert.

Bsp. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k = \frac{100}{99}.$$

Bmk. Weglassen endlich vieler Glieder:

Für die Frage "ob die Reihe konvergiert" ist des Verhalten am Anfang gleichgültig.

Genau wie bei eine Folge:

(Falls (a_n) konvergiert gegen L, so konvergiert $b_n := a_{n+k}$ gegen L.)

Im Gegensatz zur Situation bei Folgen, ändert sich aber der Grenzwert wenn einzelne Glieder weggelassen oder hinzugefügt werden.

<u>Bsp</u>: $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$

aber $\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$$= \Bigg(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{2.}\Bigg) - \underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}_{\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)}_{\frac{7}{4}}}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\frac{1}{4}}$$

Eine wichtige Bsp.
für divergente Reihe

Die Harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{ist divergent}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{ist nicht}$$

Cauchy, deswegen
auch nicht konvergent.

Bsp. Die "Teleskopreihe"

Wir betrachten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Weil:

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$\left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim S_n = \lim 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$

Bmk. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist keine Summe im Sinne der Algebra, sondern im Falle der Divergenz nur ein Symbol! für eine nicht konvergente Folge S_n. Im Falle der Konvergenz der Grenzwert der Folge S_n. Deshalb darf man mit Reihen auch NICHT wie mit gewöhnlichen Summen (endliche Summen) rechnen.

Die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

in dieser einfachen Form FALSCH!

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}_{\infty}-\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}}_{\infty.}$$

$\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n+1}$ sind divergent!

Aber für konvergente Reihen haben wir

Satz Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, $\alpha \in \mathbb{C}$

1) Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k)$ konvergent und

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

2) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$

Dann ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k \text{ konvergent}$$

und $$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Das heisst dass

<u>Bmk</u>: Die Menge der konvergenten Reihen einen Vektorraum bilden, und die Abbildung die einer konv. Reihe ihrem Grenzwert zuordnet linear ist. .

$$(a_k) = \left(\frac{1}{k}\right) \qquad (S_n) := \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.\right)$$

~~z~~

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

$$(\underline{S_n}) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \dots\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \overset{\text{defn}}{\Longleftrightarrow} (S_n) \text{ ist konvergent}$$

Satz Cauchy Kriterium

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

ist genau dann konvergent

falls
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1$ mit

$$|S_m - S_n| < \varepsilon$$

$\forall m \geq n \geq N$.

$\sum a_k$ konv $\Leftrightarrow (S_n)$ konv
$\Leftrightarrow (S_n)$ Cauchy

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1$ mit

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon .$$

$$S_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots a_n .$$

Als eine Folgerung von Cauchy Kriterium erhalten wir die Folgende Notwendige Bedingung für Konvergenz

Satz Ist eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

so muss gelten $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

d.h. $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv} \Longrightarrow \lim a_k = 0.}$

Beweis: Wir wenden Cauchy Kriterium mit

$m = n+1$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$

so dass $\left| \sum_{k=n+1}^{n+1} a_k \right| < \varepsilon$

$\cancel{n+1}\ \ge N$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ so dass $|a_{n+1}| < \varepsilon \quad n > N$.

Bmk.

$\lim a_k = 0 \not\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

Bsp. $a_k = \frac{1}{k}$.

Bsp. 1) $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q|<1 \\ \text{divergent} & |q| \ge 1 \end{cases}$

Geom. Reihe.

2) Teleskop Reihe

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}n(n+1)}$

$$a_n = \frac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}n(n+1)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3(n)(n+1)}}_{b_n} + \underbrace{\frac{1}{3^{n+1}}}_{c_n}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}} = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}\right)}_{\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)} - \left(1+\frac{1}{3}\right)$$

$$- \left(\frac{4}{3}\right)$$

Da beide $\sum b_n$ und $\sum c_n$ konvergiert, konvergiert auch

$$\sum(b_n + c_n) = \sum a_n.$$

$$= \frac{1}{3} + \left[\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right].$$

Satz Sei $a_k \geq 0$.

Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.

genau dann wenn die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$; $\left(S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

Beweis. Da $a_k \geq 0$

$$S_{n+1} = a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}$$

$$= S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq S_n$$

d.h (S_n) ist ~~ ~~ eine mon. wach. Folge.

Mit mon. Konvergenz Satz, S_n konvergiert genau dann wenn S_n nach oben beschränkt ist.

Satz (Vergleich Satz Majoranten (Minoranten) Kriterium). (Comparison Test).

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum b_k$

Reihen mit $0 \leq a_k \leq b_k$ $\forall\, k \geq K$

Dann gelten

1) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent $\Longrightarrow$ $\sum b_k$ divergent.

Bsp. 1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Wir vergleichen diese mit Teleskop Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} \to 1.$$

$$0 < \frac{1}{k \cdot k} < \frac{1}{(k-1)k}$$

$\overset{\text{verg.}}{\underset{\text{Satz}}{\Rightarrow}}$ $\sum \frac{1}{k^2}$ konv.,

Da $\sum \frac{1}{(k-1)k}$ konv,

Da $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergent ist, ist

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$, $s \geq 2$

auch konvergent.

$$\ldots \frac{1}{k^4} < \frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k}$$

3) $\sum \frac{1}{k}$ divergent

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{k}$$

Da $\sum \frac{1}{k}$ div. ist,

ist $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergent.