21.3.22

Reihen

Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Defn

- Eine **Reihe** ist eine unendliche Summe

$$a_1 + a_2 + \dots =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

einer Folge $(a_n)_n$.

- Die Reihe **konvergiert** falls die Folge der Partielsummen $(S_n)_{n\geq 1}$ konvergiert

$$S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

- In diesem Fall wird deren Limes, $\lim_{n\to\infty} S_n$, mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Bsp. 1) Geometrische Reihe

Sei $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots$$

Die Geometrische Reihe konvergiert Falls $|q| < 1$. Sie divergiert Falls $|q| \geq 1$.

//

2) **Harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{ist divergent}$$

$$s_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\lim s_n = \infty .$$

3) **Teleskopreihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 .$$

Satz: Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, $\alpha \in \mathbb{C}$.

1) Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ konvergent und

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) \pm \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right).$$

und

2) Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k)$ konvergent, und

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k) = \alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right).$$

Satz (Cauchy Kriterium)

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1$ mit

$$|s_n - s_m| < \varepsilon, \quad \forall m \geq n \geq N.$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon .$$

$$\left(s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

Notwendige Bedingung für Konvergenz

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \Rightarrow \lim a_k = 0}$$

d.h Falls $\lim a_k \neq 0$, dann

ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Satz Sei $a_k \geq 0$.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Leftrightarrow$

die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$

nach oben beschränkt

ist.

Satz (Vergleichsatz)
(Majoranten Kriterium)

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ zwei

Reihen mit $0 \leq a_k \leq b_k$

$\forall k > K$.

Dann gelten

1) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.

2) $\sum a_k$ divergiert

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverg.

Bsp. 1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert,

da $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$ konvergiert

und $0 < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$, $s \geq 2$

konvergiert, da

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert

und $\frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{k^2}$, $\forall s \geq 2$.

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergiert

da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert

und $\frac{1}{k} < \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Beweis (Vergleichsatz).

1) $0 \leq a_k \leq b_k$, $\sum b_k$ konv.

z.z. $\sum a_k$ konv.

$\sum b_k$ konvergente Reihe

mit $b_k \geq 0$

d.h. die Folge der Partialsummen $S_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$

ist nach oben beschränkt,

d.h $\exists\ C$ so dass

$$|S_n| \leq C \quad \forall n.$$

$a_k \geq 0$. Nach den Gleichem Satz, um zu zeigen, dass $\sum a_k$ konvergiert, müssen wir zeigen dass die Folge $u_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ (die Folge der Partialsummen mit a_k) nach oben beschränkt ist.

Aber da $0 \leq a_k \leq b_k$ gilt,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n.$$

Da S_n noch oben beschränkt ist, ist auch u_n

$$|u_n| \leq |S_n| \leq C.$$

d.h u_n ist noch oben beschränkt

~~d.h~~ $\sum a_k$ konvergiert.

b) Übung.

<u>Bsp.</u> $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergiert.

Beweis: $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall k \geq 1$

$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \geq 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{2^{k-1}}$

$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$

Da $\sum \frac{1}{2^{k-1}}$ konvergent, konvergiert auch $\sum \frac{1}{k!}$

Absolute Konvergenz:

Defn Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolute konvergent, falls die Reihe der Absolutbeträge, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent.

Bmk: Falls die Reihe der Absolutbeträge nicht konvergiert, kann sie, $\sum |a_k|$, bestimmt gegen $+\infty$ divergieren.

Bmk: Absolute konvergenz ist stärker! d.h.

Eine Abs. konver. Reihe konvergiert auch im gewöhnlichen Sinn.

$$\boxed{\sum |a_k| \text{ konvergiert} \Longrightarrow \sum a_k \text{ ist konvergent}}$$

Satz Eine Abs. konvergente Reihe $\sum a_k$ ist auch konvergent und es gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Beweis. Da $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, gilt nach Cauchy Kriterium:

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \geq 1$ mit

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon \quad \forall\, m \geq n \geq N.$$

Daraus folgt

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \underset{\Delta\text{ Ungleichung}}{\leq} \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon$$

$\forall\, m \geq n \geq N.$

$$\overset{\text{Cauchy}}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert.}$$

Seien jetzt

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$u_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

$$s_n \leq |s_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| = u_n.$$

$$\lim s_n \leq \lim u_n = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

$$\lim s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Vorsichtig!!

Bmk. $\sum |a_k|$ konv $\xRightarrow{\text{Satz}} \sum a_k$

aber $\sum a_k$ konv

$\not\Rightarrow \sum |a_k|$ konv!!

Bsp. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$ ist konvergent

aber $\sum \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = \sum \frac{1}{k}$ ist divergent.

Die Konvergenz der

~~Die~~ Alternierende Harmonische

Reihe, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

ist ein Spezialfall von

Satz von Leibniz.

Satz (Leibniz) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monotone fallende Folge

mit $a_n \geq 0$; $\forall n \geq 1$

und $\lim a_n = 0$. Dann

konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$

$= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$

und es gilt

$$a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

wobei

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k .$$

BSP.

Wir können den Satz von Leibniz für $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ anwenden.

$a_k = \frac{1}{k} \geq 0$, mon. fallend

$\lim a_k = 0$.

$\overset{\text{}}{\underset{\text{Leibniz}}{\Longrightarrow}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konv.

Sei $S := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Dann gilt

$a_1 - a_2 \leq S \leq a_1 = 1$

$1 - \frac{1}{2}$

$$\boxed{\frac{1}{2} \leq S \leq 1.}$$

Clicker Frage

$\sum a_n$ konv

$\iff$ (Cauchy)

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1$

$|s_{n-1} - s_m| < \varepsilon, \forall m \geq n \geq N$

$\|$

$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$

$\forall m \geq n > N$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N$ s.d.

$\sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq N$

heisst $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konv.

$\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ conv.

aber

$\sum \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right|$ div.

Deswegen die Aussage

„Für jede konv. Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, und für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq m \geq N$ $\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$ gilt"

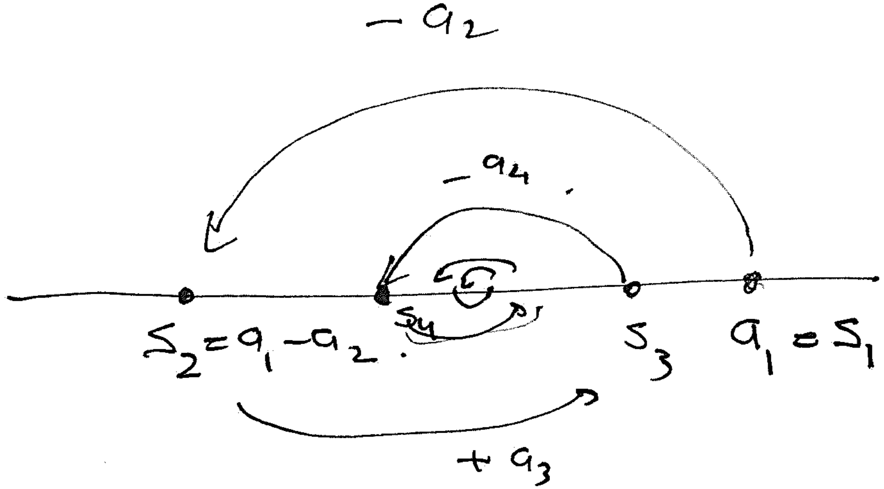
ist FALSCH!

Beweis (Leibniz Satz).

Sei $S_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$

$= a_1 - a_2 + a_3 - \dots \pm a_n$

die Folge der Partialsummen.



$S_2 = a_1 - a_2$

$S_3 = a_1 - a_2 + a_3$

$S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4.$

$S_{2n+1} = \underbrace{a_1 - a_2 + a_3 \dots + a_{2n-1}}_{S_{2n-1}} - a_{2n} + a_{2n+1}$

$= S_{2n-1} - (\underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{> 0}).$

da a_n mon. fallend ist.

$\boxed{S_{2n+1} \leq S_{2n-1}}$ (1)

$S_{2n} = \underbrace{a_1 - a_2 + \dots + a_{2n-2}}_{S_{2n-2}} + a_{2n-1} - a_{2n}$

$S_{2n-2} + (\underbrace{a_{2n-1} - a_{2n}}_{\geq 0})$

$\boxed{S_{2n} \geq S_{2n-2}}$ (2).

d.h die Teilfolge

$\boxed{(S_{2n-1})_{n\geq 1} \text{ ist mon. fallend}}$

$\boxed{(S_{2n})_{n\geq 1} \text{ ist mon. wachsend.}}$

Wir haben auch.

(3) $\boxed{S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n}}$

(4) $\boxed{a_1 - a_2 = S_2 \underset{\substack{\downarrow \\ (S_{2n}) \text{ mon wachsend.}}}{\leq} S_{2n} \overset{(3)}{\leq} S_{2n-1} \underset{\substack{\downarrow \\ (S_{2n-1}) \searrow .}}{\leq} S_1 = a_1}$

$\overset{(4)}{\Longrightarrow}$ Beide Folgen ~~sind~~

$(S_{2n-1})_{n\geq 1}$ und

$(S_{2n})_{n\geq 1}$ sind

beschränkt.

$\xrightarrow[\text{konv Satz}]{\text{mon.}}$ Beide Folgen

$(S_{2n-1})_{n\geq 1}$ konvergen.

$(S_{2n})_{n\geq 1}$

Aber nach (3)

$$\lim S_{2n} = \lim S_{2n-1} - \underbrace{\lim a_{2n}}_{}$$

$$\Rightarrow \lim S_{2n} = \lim S_{2n-1} =: S. \quad \circledcirc.$$

13.

Daraus folgt dass $(s_m)_{m\geq 1}$ mit gleichen Grenzwert konvergiert.

$$\lim s_m = s.$$

Diese folgt aus folgende Lemma.

<u>Lemma</u>: Sei (s_n) eine beschränkte Folge. Sei $(s_{2n})_{n\geq 1}$ die Teilfolge der Folgengliedern mit gerade Indizen -

und $(s_{2n-1})_{n\geq 1}$ die Teilfolge mit ungerade Indizen.

Falls $\lim s_{2n}$ und $\lim s_{2n-1}$ existieren und

$$\lim s_{2n} = \lim s_{2n-1} = s,$$

so konvergiert s_n mit $\lim s_n = s$.

Die alternierende Harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$ ist konvergent

aber nicht abs. konvergent

$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \right.$ ist divergent$\left. \right)$.

Eine solche, konvergent aber nicht abs. konvergente, Reihe heisst bedingt konvergent (conditionally konvergent).

Bsp. $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \frac{1}{4} + \dots$

$$a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

$$\frac{1}{2} \leq S \leq a_1 = 1.$$

Wir ändern jetzt die Reihenfolge der Summanden wie folgt.

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) \mp \frac{1}{8}$$

$$+ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right)$$

$$+ \dots.$$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14}$

$+ \cdot - \quad -$

$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \cdot \cdot}_{S}\Big)$.

Die umgeordnete Reihe konvergiert mit Grenzwert

$\frac{1}{2} S$!!!

<u>Defn</u> Eine Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ ist eine <u>Umordnung</u> der Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, falls es eine bijektive Abbildung

$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt

so dass $a_n' = a_{\phi(n)}$

Bei absolute Konvergente Reihen haben wir die Folgende Satz

Satz (Dirichlet)

Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abs. konvergiert (d.h $\sum |a_k|$ konv.).

dann jede Umordnung der Reihe hat denselben Grenzwert.

Bmk Vorsichtig!! Dieser Satz wird falsch, wenn man auf die abs. Konv. verzichtet!

Wie wir im vorherigen Bsp mit Umordnung der alt. Harm. Reihe gesehen haben.

Wir haben die folgende Satz von Riemann.

Satz (Riemann) Sei $\sum a_n$ eine konvergente aber nicht abs konv. Reihe. Dann gibt es zu jedem $A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Umordnung der Reihe, die gegen A konvergiert.

Nach Satz von Dirichlet, ~~bei~~ kann bei Abs. konv. Reihen solche "Patologische Verhältnis" nicht auftreten!

Wir werden nun hinreichende Bedingungen für abs. Konvergenz herleiten.

Diese Kriterium: sind

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Quotientenkriterium} \\ \text{Wurzelkriterium.} \end{array} \right\}$

stützt sich auf das Vergleichsatz und die Geometrische Reihe.

Satz (Quotientenkriterium)

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \neq 0$ $\forall n \geq 1$. ~~Falls~~

i) Falls $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ dann konvergiert die Reihe absolut.

2) Falls $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$,

divergiert der Reihe.

Bmk. Falls $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

existiert und gleich L

ist, und $L < 1$

so ist $\sum a_n$ abs. konv

Falls $L > 1$, ist

$\sum a_n$. div.

Falls $L = 1$, versagt das

Quotientenkriterium.

Der Fall der $L = 1$.

Bsp. Sei $a_n = \frac{1}{n^2}$

$b_n = \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| = 1$$

$$\lim \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim \left|\frac{n}{n+1}\right| = 1.$$

$\sum a_n = \sum \frac{1}{n^2}$ konv.

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ div.