Defn

23.3.22

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert heisst dass die Folge der Partielsummen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

konvergiert.

$$\lim s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Bsp: 1) Geometrische reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \; \begin{cases} \text{konvergert falls } |q|<1 \\ \text{divergenert falls } |q|\geq 1. \end{cases}$$

2) Harmonische Reihe

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent

3) Alternierende Harmonische Reihe,

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, ist konvergent

4) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \begin{cases} \text{ist konvergent falls } s>1 \\ \text{ist divergent falls } 0\leq s\leq 1 \end{cases}$$

Defn Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolute falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergert $\Rightarrow \sum a_k$ konvergiert

!! **Bmk** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert

$$\not\Rightarrow \sum |a_k| \text{ konvergiert}$$

Bsp: $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konv.

aber $\sum \frac{1}{k}$ ist divergent.

**Notwendige Bedingung für Konvergenz**

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv} \Rightarrow \lim a_k = 0}$$

Bmk $\not\Leftarrow$

$$\boxed{\lim a_k \neq 0 \Rightarrow \sum a_k \text{ div.}}$$

**Kriterium für Konvergenz (Divergenz)**

**Satz (Majoranten (minoranten) Kriterium)**

**Vergleich satz**

Seien $\sum a_k$, $\sum b_k$ zwei Reihen mit

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq K.$$

Dann gelten

1) $\sum b_k$ konv $\Rightarrow \sum a_k$ konv

2) $\sum a_k$ div $\Rightarrow \sum b_k$ div.

- **Satz** Sei $a_k \geq 0$

$\sum a_k$ konv

$\iff$ $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$

ist ~~eine konv.~~ ~~Folge~~ nach oben beschränkt

- **Satz** Cauchy

$\sum a_k$ konv $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N \geq 1$ so dass

$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon,$

$\forall\ n \geq m \geq N$.

## Alternierende Reihen

**Satz** (Leibniz) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge, die monoton fallend, (mit $a_n \geq 0$) ist, und $\lim a_n = 0$. Dann

konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k =: S$

und $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$.

**Satz** (Dirichlet) Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. abs (d.h $\sum |a_k|$ konv.) dann jede Umordnung der Reihe konvergiert mit denselben Grenzwert.

**Satz (Riemann)** Sei

$\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente aber nicht abs. konvergente Reihe (d.h eine bedingtkonvergente Reihe)

$\left( \sum a_k \right.$ konv, aber $\left. \sum |a_k| \text{ div.} \right)$.

Dann gibt es zu jedem $A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Umordnung der Reihe, die gegen $A$ konvergiert.

**Kriterium für Absolute Konvergenz**

**Satz (Quotientenkriterium)**

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n \neq 0 \ \forall n \geq 1$

a) Falls $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

dann konv. die Reihe $\sum a_k$ absolut

b) Falls $\liminf \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) > 1$,

dann divergiert die Reihe.

**Bmk** Falls

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

Falls $L < 1$, dann konv $\sum a_k$ absolute.

Falls $L > 1$, dann div $\sum a_k$.

Falls $L = 1$, kein INFORMATION.

**Bsp.** (1) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ konv.

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$$

2) $a_n = \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n}$ div.

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1.$$

**Beweis** (Quotienten kriterium).

$$c_n := \sup \left\{ \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| : k \geq n \right\}.$$

$$\limsup \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim c_n < 1$$

Sei $\lim c_n := q_0 < 1$

Sei $0 < q < 1$, $q_0 < q$.

Sei $\varepsilon = q - q_0$

Dann gilt für gross genüg $N \in \mathbb{N}$ dass.

$$|c_n - q_0| < \varepsilon = q - q_0$$

$$\forall n \geq N$$

(Da $\lim c_n = q_0$.

$\equiv \forall \varepsilon > 0, \exists N$ s.d.

$|c_n - q| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$)

Aus $|c_n - q_0| < q - q_0, \ \forall n \geq N.$

folgt insbesondere dass

$$c_N \leq q.$$

Dann $\forall k \geq N$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q. \quad c_N = \sup \left\{ \frac{a_{N+1}}{a_N}, \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}, \ldots \right.$$

Woraus:

$$|a_{k+1}| \leq q\,|a_k| \quad \forall k \geq N.$$

folgt.

$$|a_{N+j}| \leq q\,|a_{N+j-1}|$$

$$\leq q^2\,|a_{N+j-2}|$$

$$\vdots$$

$$\leq q^j\,|a_N| = \frac{q^N}{q^N}\,q^j\,|a_N|$$

$$= q^{N+j} \underbrace{\left|\frac{a_N}{q^N}\right|}_{M}.$$

Wir haben gezeigt dass

$\forall n \geq N+1$

$|a_n| \leq q^n M$.

Wir können nun

Vergleich satz anwenden

mit $b_n = q^n M$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = M \sum_{n=1}^{\infty} q^n$

konv., da $|q|<1$

$\Rightarrow \sum |a_n|$ konv.

d.h $\sum a_n$ konv. abs.

Analog kann man zeigen dass falls $\liminf \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, die Folge $(a_n)$ unbeschränkt ist.

Beide folgen

$\sum a_k$, $\sum |a_k|$ sind

divergent.

**Bsp.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergiert

$\xRightarrow[\text{Quotientenkriterium}]{} \sum \frac{n!}{n^n}$ konv.

$a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \frac{n^n}{n!}\right|$$

$$= \underbrace{\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)}_{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

$$\left( \sum a_k \text{ konv.} \implies \lim a_k = 0. \right)$$

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0.$$

$n^n$ wächst schneller als $n!$

# Wichtiges Bsp.

Für $z \in \mathbb{C}$ betrachten wir die Reihe

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum a_n.$$

$$a_n = \frac{z^n}{n!}$$

Frage Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert diese Reihe?

$z \neq 0$.

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right| \cdot \left|\frac{n!}{z^n}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty} |z| \cdot \left|\frac{1}{n+1}\right|$$

$$= |z| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|n+1|} = 0 < 1$$

$\forall z$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Wir definieren

$$\boxed{\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

**Bsp.** Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k k!}{k^k} \quad ?$$

$$a_k = \frac{z^k k!}{k^k}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{z^{k+1}}{z^k} \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!}\right|$$

$$= |z| \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}}_{\to e} \longrightarrow \frac{|z|}{e}$$

$\xRightarrow[\text{krit.}]{\text{Quo.}}$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k k!}{k^k}$ konv.

falls $\frac{|z|}{e} < 1$

$\sum \ldots$ divergent.

falls $\frac{|z|}{e} > 1$

**Bsp** $\sum_{k=1}^{\infty} k q^k$. ist

für $|q|<1$ abs. konv.

Um das zu sehen können wir Quot. Krit. benutzen.

$$a_k = k q^k$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(k+1)\, q^{k+1}}{k\, q^k}\right| = \left|\frac{k+1}{k}\right| \cdot |q|$$

$$\lim \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{k+1}{k}\right| |q| = |q|$$

Falls $|q|<1$, $\sum k q^k$ konv.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k q^k$$

$$= q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 \cdot$$

$$\begin{aligned} = q + q^2 + q^3 + q^4 & \\ + q^2 + q^3 + q^4 & + \ldots \\ + q^3 + q^4 & \\ + q^4 & \end{aligned}$$

$$- - - - -$$

$$\begin{aligned} &= q\,(1 + q + q^2 + \ldots) \\ &+ q^2\,(1 + q + q^2 + \ldots) \\ &+ q^3\,(1 + q + q^2 + \ldots) \\ &+ \ldots \\ &\;\vdots \end{aligned}$$

$$= (q + q^2 + \cdots)(1 + q + q^2 + \cdots)$$

$$= q\,\underbrace{(1 + q + q^2 \cdots)}_{\substack{\sum_{k=0}^{\infty} q^k \\ \frac{1}{1-q}}}\,\underbrace{(1 + q + q^2 + \cdots)}_{\substack{\sum_{k=0}^{\infty} q^k \\ \frac{1}{1-q}.}}$$

$$= \frac{q}{(1-q)^2}$$

**Satz** (Wurzelkriterium)

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge.

1) Falls $\limsup (|a_n|^{1/n}) = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

dann konv $\sum a_k$ absolute.

2) Falls $\limsup |a_n|^{1/n} > 1$,

divergieren $\sum a_n$ und $\sum |a_n|$

**Bmk** Falls $\lim (|a_n|^{1/n}) = L$

$L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konv. abs.

$L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ div.

Beweis.

Sei $c_n = \sup\{|a_k|^{1/k} : k \geq n\}$

Sei $\limsup c_n = q_0 < 1$

Sei $q < 1$, $q_0 < q$

Sei $\varepsilon = q - q_0$

Dann gibt es $N \geq 1$

so dass

$$|c_n - q_0| < \varepsilon = q - q_0 \quad \forall n \geq N.$$

Insbesondere $c_N < q$

Dann folgt dass $\forall k \geq N$

$$|a_k|^{1/k} \leq c_N < q.$$

Woraus folgt dass

$$|a_k| \leq q^k, \quad q < 1$$

Mit Vergleichsatz

$$b_k = q^k,$$

$\sum b_k = \sum q^k$ konv.

Deswegen konvergiert

auch $\sum a_k$.

**Bsp.**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5n+2n^3}{6n^3+5}\right)^n$$

$$a_n=\left(\frac{5n+2n^3}{6n^3+5}\right)^n.$$

$$|a_n|^{1/n}=\left|\frac{5n+2n^3}{6n^3+5}\right| \xrightarrow[\text{Übung}]{} \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{3}<1$$

$$\xRightarrow[\text{Wurzelk.}]{} \sum a_n \text{ konv. abs.}$$

**Bmk.** Wurzelkriterium ist "stärker" als Quotientenkriterium.

d.h. wenn der Wurzelkriterium versagt, versagt auch Quot. Kriterium. Aber es gibt Bsp, in denen Wurzelkrit. funktioniert aber Quo. Krit. versagt.

**Bmk**

$$\liminf\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \liminf |a_n|^{1/n} \le \limsup |a_n|^{1/n} \le \limsup\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Bsp. $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} & n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2^n} & n \text{ gerade.} \end{cases}$

( $\sum a_n$ konv. Vergleich mit $\sum \frac{1}{2^n}$ ).

Für Quotientenkriterium

Für $n$ = ungerade

$$a_n = \frac{1}{2^{n+1}} = a_{n+1}$$

Falls $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existiert es muss gleich 1 sein,

Aber Grenzwert $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existiert nicht!

Da für ~~n~~ $n$ = gerade

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/2^{n+2}}{1/2^n} = \frac{1}{4}.$$

---

Für $n_j$ ungerade $(a_{n_j})$

$$\lim_{j \to \infty} (a_{n_j})^{1/n_j} = \lim_{j \to \infty} \frac{1}{2^{1+1/n_j}} = \frac{1}{2}.$$

Für $n$ gerade, ist auch

$$\lim a_{n_j}^{1/n_j} = \frac{1}{2} < 1.$$

Wurzelkriterium funktioniert.

## Potenzreihe.

**Defn** Sei $(c_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, (in $\mathbb{C}$)

Die Potenzreihe in $z \in \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$p(z) := c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

**Frage.** Wann ist eine Potenzreihe konvergent.

**Bsp.** $\exp(z) = \sum \frac{z^k}{k!}$

$c_k = \frac{1}{k!}$, konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$.

**Satz** Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

konvergiert absolute für alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$|z| < \rho$$

wobei

$$\rho := \begin{cases} \infty & \text{Falls } \limsup |c_k|^{1/k} = 0. \\ \dfrac{1}{\limsup |c_k|^{1/k}} & \text{falls } \limsup |c_k|^{1/k} > 0. \end{cases}$$

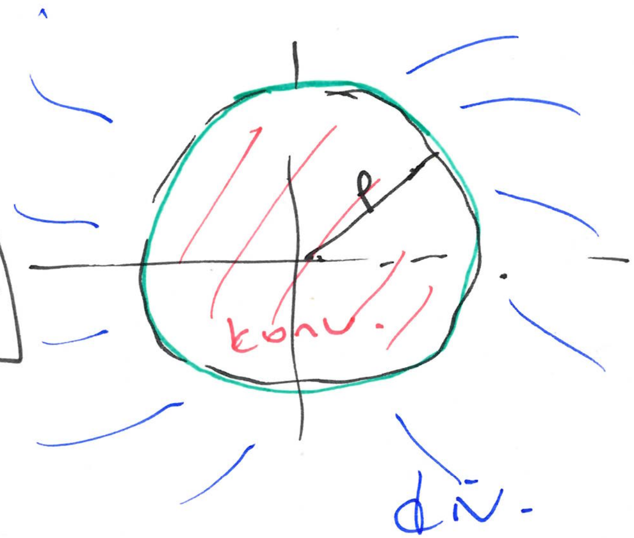
$\sum c_k z^k$ ist divergent für alle $|z| > \rho$.

**Beweis** Übung.

**Bmk.** Die Konvergenzbereich von eine Potenzreihe

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho \}$$

ist ein Kreis mit radius $\rho$



Konvention.

1) Falls $\{|c_k|^{1/k} ; k \geq 1\}$

nicht beschränkt ist,

setzen wir $\rho = 0$.

2) Falls $\{\sqrt[k]{|c_k|}, k \geq 1\}$

beschränkt ist und

zudem $\limsup |c_k|^{1/k} = 0$

setzen wir $\rho = \infty$.

d.h die Potenzreihe

$P(z) = \sum c_k z^k$ konv.

$\forall z \in \mathbb{C}$.

Bsp. Manchmal

funktionieren weder

Quotientenkriterium

noch Wurzelkriterium.

Bsp. (Riemann Zeta Funktion)

Definiere $s \in \mathbb{R}$

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

und fragen nach

Konvergenz?

Clicker Frage.

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}.$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right| \left|\frac{n}{(-1)^n}\right|$$

$$\lim \left|\frac{n}{n+1}\right| = 1$$

Versagt des Quot. krit.!

Quotienten kriterium sagt NICHTS über die Konv. der Reihe.

Aber man kann Leibniz Satz benutzen um Konvergenz der Reihe $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ zu folgen

---

$\sum (-1)^n a_n$ mit $a_n = \frac{1}{n}$.

$\lim a_n = 0$, $a_n$ mon. fallend.

$$\xRightarrow[\text{Leibniz}]{} \sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ konv.}$$

## Clicker Frage.

Der wert von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3\pi}{4} i\right)^n \frac{1}{n!} \quad \text{ist}$$

$$= \exp\left(\frac{3\pi}{4} i\right).$$

$$= \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Hint:**

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

konvergiert für jede $z \in \mathbb{C}$.