28-3-22

Kriterium für Absolute Konvergenz

Quotientenkriterium

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \neq 0$ $\forall n \geq 1$.

a) Falls $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

dann konvergiert die Reihe $\sum a_k$ absolute

b) Falls $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$,

dann divergiert die Reihe

Bmk
- Falls $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ dann konv. die Reihe $\sum a_k$
- Falls $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$, dann div. die Reihe.
- Falls $L = 1$, kein INFO!

Wichtiges Bsp.

Für $z \in \mathbb{C}$, die Exponential Reihe ist

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

$\exp(z)$ ist konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$.

Wurzelkriterium

1) Falls $\limsup |a_n|^{1/n} < 1$ dann konv $\sum a_n$ absolute
2) Falls $\limsup |a_n|^{1/n} > 1$ dann div. $\sum a_n$ und $\sum |a_n|$.

Bmk • Falls $\lim |a_n|^{1/n} = L < 1$

dann ist $\sum a_k$ abs. konv.

• Falls $\lim |a_n|^{1/n} = L > 1$, dann

d.h. $\sum a_k$ und $\sum |a_k|$

• Falls $L = 1 \Rightarrow$ kein INFO!

Bmk Wurzelkriterium ist stärker als Quotientenkriterium

Bsp $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} & n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2^n} & n \text{ gerade} \end{cases}$

Wurzelkriterium funktioniert

(Da $\lim a_n^{1/n} = \frac{1}{2} < 1$).

Aber Quot. kriterium funktioniert NICHT!

Für n = ungerade

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1/2^{n+1}}{1/2^{n+1}} = 1$$

(Für n = gerade

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1/2^{n+2}}{1/2^n} = \frac{1}{4}.$$)

$$\Rightarrow \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$$

Defn Potenzreihe sei $(c_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Die Potenzreihe in $z \in \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

Satz

Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$ konvergiert absolute

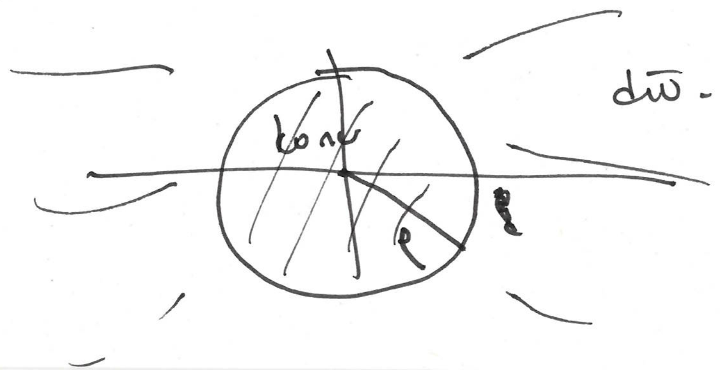
für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho$

wobei

$$\rho := \begin{cases} \infty & \text{falls } \limsup |c_k|^{1/k} = 0 \\ \dfrac{1}{\limsup |c_k|^{1/k}} & \text{falls } \limsup |c_k|^{1/k} > 0 \end{cases}$$

$\sum c_k z^k$ ist divergent für alle $|z| > \rho$

$\rho :=$ radius der Konvergenz kreis.



Riemann Zeta Funktion

Für $s \in \mathbb{R}$, definiere

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Bmk

Für $\zeta(s)$ funktioniert

weder das Quotientkriterium noch das Wurzelkriterium!

Sei $a_n = \frac{1}{n^s}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$|a_n|^{1/n} = \frac{1}{(n^{1/n})^s} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Wir haben früher die folgende Idee benutzt (für die div. der Harm. Reihe)

$$1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}_{> \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+\dots$$

$$>1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}_{1}+\dots$$

Sei $s>1$: Wir segmentieren die Reihe auf die selbe Art:

$$1+\underbrace{\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}}_{<\underbrace{\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^s}}_{\frac{1}{2^{s-1}}}}+\underbrace{\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}}_{<\underbrace{\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}}_{\frac{1}{4^{s-1}}}}+\dots$$

$$+\dots$$

$$\leq 1+\frac{1}{2^{s-1}}+\frac{1}{(2^2)^{(s-1)}}+\frac{2^3}{2^{3s}}+\dots$$

$$\leq 1+\frac{1}{2^{s-1}}+\frac{1}{2^{2s-2}}+\frac{1}{2^{3s-3}}+\dots$$

$$=1+\frac{1}{2^{s-1}}+\frac{1}{(2^{s-1})^2}+\frac{1}{(2^{s-1})^3}+\dots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

Die letzte Summe

ist die Geom.

Reihe mit

$$q = \frac{1}{2^{s-1}}$$

Für $s > 1$, $|q| = \left|\frac{1}{2^{s-1}}\right| < 1$

Damit für $s > 1$, $\zeta(s)$

ist konvergent (nach Vergleichskrit.)

und $\zeta(s) < \sum_{n=0}^{\infty} q^n$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}}$$

Für $0 < s < 1$

gilt $\frac{1}{k^s} > \frac{1}{k}$

Da $\sum \frac{1}{k}$ divergiert,

divergiert auch $\zeta(s) = \sum \frac{1}{k^s}$

für $0 < s \leq 1$

?? $\left(1 + 2 + 3 + \dots \;\text{"}=\text{"}\; -\frac{1}{12}\right)$!!

$\zeta(-1)$, vielleicht später ☺

Multiplikation von Reihen

Für endliche Summen

$$(a_0 + a_1 + \dots + a_m)(b_0 + b_1 + \dots + b_n)$$

$$\left.\begin{aligned} &= a_0 (b_0 + \dots + b_n) \\ &+ a_1 (b_0 + \dots b_n) \\ &+ a_m (b_0 + \dots b_n) \end{aligned}\right\} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_k b_j$$

$$\left.\begin{aligned} &= b_0 (a_0 + \dots + a_m) \\ &\ \vdots \\ &\ b_n (a_0 + \dots a_m) \end{aligned}\right\} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_k b_j .$$

$$= \underbrace{a_0 b_0}_{k+j=0} + \underbrace{a_0 b_1 + a_1 b_0}_{k+j=1} + \underbrace{a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0}_{k+j=2} + \dots + a_m b_n .$$

Frage ist: Wie können wir zwei Reihen multiplizieren?

Nehmen wir

$$a_k b_\ell := c_{k\ell}$$

$a_0 b_0$	$a_0 b_1$	$a_0 b_2$	
c_{00}	c_{01}	c_{02}	— — —
c_{10}	c_{11}	c_{12}	— — —
$\vdots$			

$$\begin{array}{llll} a_0b_0 & a_0b_1 & & \\ c_{00} & c_{01} & c_{02} & \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & \\ \vdots & & & \end{array}$$

$s_0 = a_0(b_0+b_1+\cdots$

$s_1 = a_1(b_0+b_1+\cdots$

$s_2 = \cdots$

$u_0 = b_0(a_0+a_1\cdots)$ $\quad u_1 = b_1(a_0+a_1+\cdots)$

$$s_0+s_1+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{c_{kl}}_{a_k b_l}$$

$$u_0+u_1+\cdots = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{kl}.$$

Die Frage ist: ist

$$s_0+s_1+s_2\cdots$$
$$= u_0+u_1+u_2\cdots\ ??$$

$$\begin{array}{ccccccc} c_{00} & c_{01} & c_{02} & & & & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & = 0 = S_0 \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & & & & \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & = 0 = S_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & = 0 = S_2 \\ \vdots & & & & & & \end{array}$$

$c_{\ell\ell} = 1$, $c_{\ell\,\ell+1} = -1$

$c_{k\ell} = 0$ sonst.

$\downarrow$

$u_0 = 1$

$u_1 = 0$

$u_2 = 0$

$\vdots$

$$\sum S_i = 0$$

$$\sum u_j = 1.$$

Diese Bsp. zeigt dass Beide Summe konvergieren können (aber) mit verschiedene Grenzwerte.

Satz 2.7.23 (Cauchy)

Wir nehmen an, dass es $B > 0$ gibt so dass

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |c_{ij}| \leq B$$

$\forall m \geq 0$.

Dann konvergieren die folgenden Reihen absolut

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} \quad \forall i \geq 0$$

und

$$U_j := \sum_{i=0}^{\infty} c_{ij}, \quad \forall j \geq 0.$$

sowie

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i, \quad \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

und es gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} c_{ij}$$

zudem konvergiert jede lineare Anordnung der Doppelreihe absolute mit selbem Grenzwert.

<u>Defn</u> $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine lineare Anordnung der Doppelreihe $\sum_{i,j\geq 0}^{\infty} c_{ij}$ falls es Bijektion $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ gibt mit $b_k = c_{\phi(k)}$.

—o—

Um zwei Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ zu multiplizieren, müssen wir eine Art finden, die Einträge der Matrix

$$\begin{matrix} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & \cdots \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & & \\ \vdots & & & \end{matrix}$$

zu addieren.

Defn Das Cauchy Produkt der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist

die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \, b_j \right).$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + b_0 a_1)$$

$$+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)$$

$$+ \ldots$$

Satz Falls die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ abs. konvergieren, so konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt

$$\sum_{i=0} \sum_{j=0} a_i b_j = \sum_{j=0} \sum_{i=0} a_i b_j$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i \, b_j \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \, b_j \right)$$

Vorsichtig!

Das Cauchy Produkt muss nicht immer konvergieren!!

Bsp. $a_k = \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = b_k$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert (nach Leibniz).

$$\left|\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}\,(-1)^{j}}{\sqrt{n-j+1}\,\sqrt{j+1}}\right| = \left|\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\, b_j\right|$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-j+1}\,\sqrt{j+1}}. =: c_n.$$

$$(n-j+1)(j+1) \le (n+1)(n+1) \quad (0 \le j \le n)$$

$$= (n+1)^2.$$

$$\boxed{\frac{1}{[(n-j+1)(j+1)]^{1/2}} \ge \frac{1}{n+1}}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-j+1)(j+1)}}. \ge \frac{(n+1)}{n+1} = 1.$$

$$c_n \ge 1 \implies$$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent.

Satz $\forall x, y \in \mathbb{C}$,

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

Beweis: $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

konv. abs $\forall x \in \mathbb{C}$.

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{y^\ell}{\ell!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+\ell=n} \frac{x^k y^\ell}{k!\,\ell!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!\,(n-k)!}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n!} \frac{x^k y^{n-k}}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k y^{n-k}$$

Zur Erinnerung:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}} x^k y^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

Somit

$$\exp(x)\exp(y)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n$$

$$= \exp(x+y)$$

Wir haben früher gesehen

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n := e.$$

Jetzt möchten wir den Zusammenhang zwischen "e" und $\exp(1)$

und im. Allg.

e^z und $\exp(z)$

behandeln.

Satz 2.7.28 Für jedes n, sei

$f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge.

~~Wi~~ $((f_n)_{n \geq 1}$ ist eine Folge der Folgen$)$.

Wir nehmen an, dass

1) $f(j) := \lim_{n\to\infty} f_n(j)$ existiert

$\forall j \in \mathbb{N}$.

2) Es gibt eine Funktion

$g = \mathbb{N} \longrightarrow [0, \infty[$.

so dass

a) $|f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j \geq 0$
$\forall n \geq 0$.

b) $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ konvergiert.

Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)$$

d.h.

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \sum_{j=0}^{\infty} \lim f_n(j) = \text{Rechten Seite.}$$

Link. Seite $\lim \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$

$\boxtimes$

<u>Kor.</u> Für jedes $z \in \mathbb{C}$

konvergiert die Folge

$$\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$$ und

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

Beweis. Sei $z \in \mathbb{C}$ gegeben.

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{z}{n}\right)^k.$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k}.$$

Sei $f_n(k) := \begin{cases} \frac{z^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!\, n^k} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & k \geq n+1 \end{cases}$

Dann $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k)$$

$$\lim \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k)$$

Nun:

$$\frac{n!}{(n-k)!\, n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{\underbrace{n\, n \cdots n}_{k\text{-mal}}}$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right) \cdots \left(\frac{n-k+1}{n}\right) \leq 1$$

$$\lim \frac{n!}{(n-k)!\, n^k} = 1.$$

Somit $\lim_{n\to\infty} f_n(k) = \boxed{\frac{z^k}{k!} =: f(k)}$

Sei $g(k) := \frac{|z|^k}{k!}$ Dann gilt $|f_n(k)| \leq \frac{|z|^k}{k!} = g(k)$

16.

Wir haben schon

gezeigt dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$$

konvergeert $\forall z \in \mathbb{C}$.

Aus satz 2.7.28: folgt

dass

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$$

$$\parallel$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

Damit

$$\exp(z) = \lim \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

$\square$

Clicker Frage

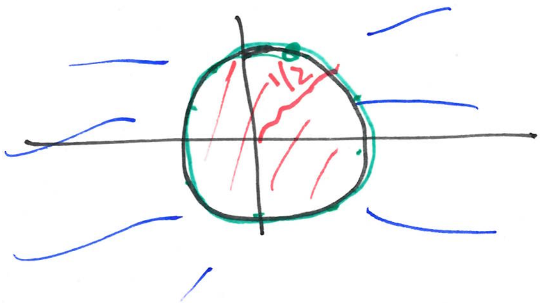
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n z^n}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Auf dem Rand der konv. kreis $|z| = \frac{1}{2}$

$$c_n = \frac{2^n}{n\sqrt{n}}.$$

$$|c_n|^{1/n} = \frac{2}{n^{1/n} \cdot n^{\frac{1}{2n}}} \to \frac{2}{1 \cdot 1}.$$

$$\rho = \frac{1}{\limsup |c_n|^{1/n}} = \frac{1}{2}.$$



$$\sum \left| \frac{2^n z^n}{n\sqrt{n}} \right| = \sum \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

$|z| = \frac{1}{2}.$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$= \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

konv. abs.

$$\sum |a_k|$$