Riemann Zeta Funktion

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad s \in \mathbb{R}^+$$

ist konvergent falls $s > 1$
und divergent falls $s \leq 1$

Doppelreihen

Satz (Cauchy) Wir nehmen an dass es $B > 0$ gibt so dass

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{m} |c_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0.$$

Dann konvergiert jede lineare Anordnung der Doppelreihe $\sum_{i,j} c_{ij}$ absolute und es gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} c_{ij}$$

Kor.: Falls die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ absolute konvergieren, so konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_j$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \right)$$

Sei $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

$\exp(z)$ konv. abs

$\forall z \in \mathbb{C}$.

Satz $\forall x, y \in \mathbb{C}$

$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$.

Satz Für jedes $z \in \mathbb{C}$

konvergiert die Folge

$\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ und

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.

Bsp • Geom. Reihe

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist $\begin{cases} \text{konv. falls } |q|<1 \\ \text{div. falls } |q|\geq 1. \end{cases}$

• Teleskop Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n-1})$ konv.

falls die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ konv.

In diesem Fall

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n-1}) = \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) - b_0$

Bsp: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$= 1$.

- Riemann zeta Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ ist } \begin{cases} \text{konv. falls } s > 1 \\ \text{div. falls } s \leq 1 \end{cases}$$

- Alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad , \text{ mit}$$

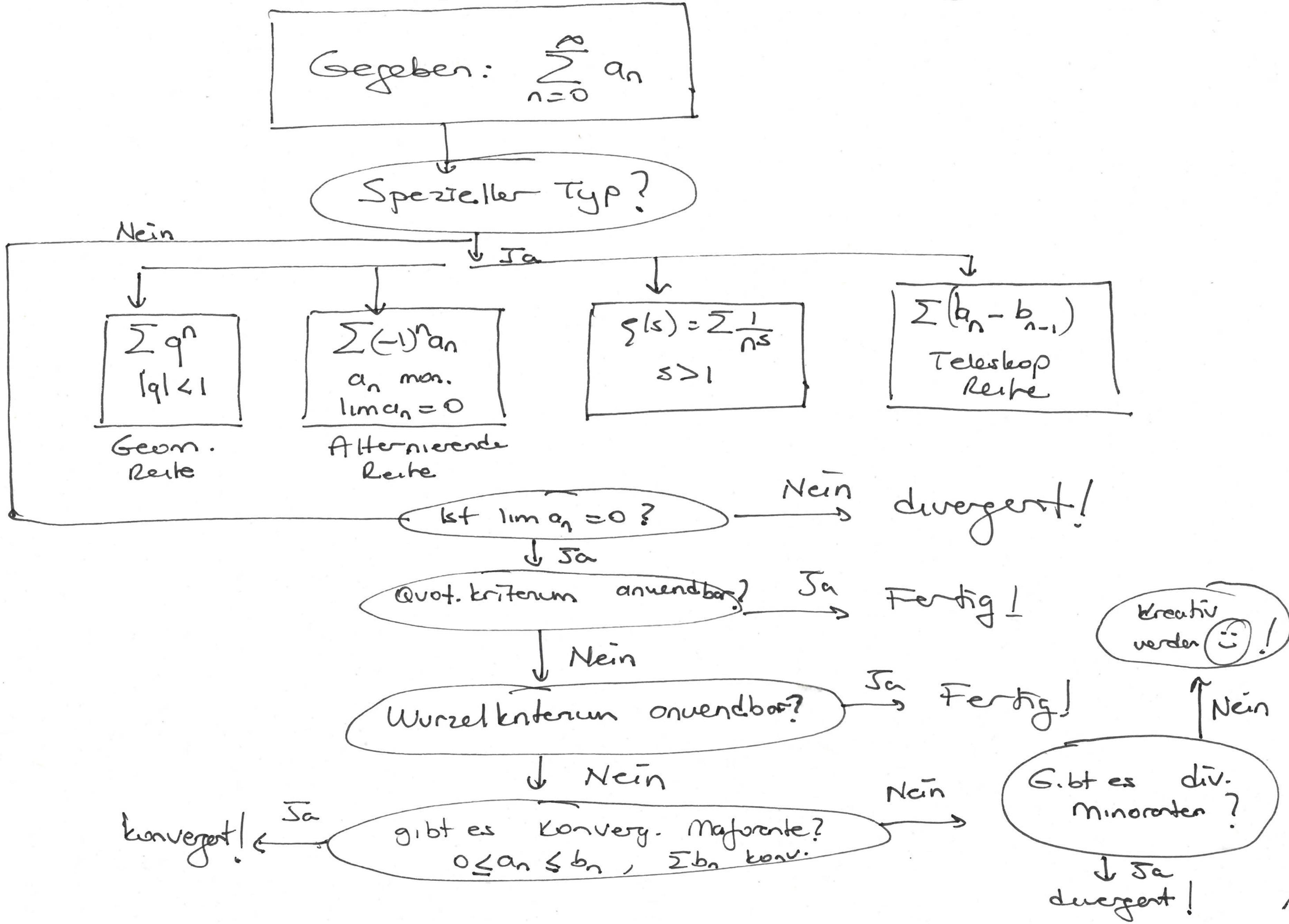
a_n mon. fallend

und $\lim a_n = 0$

konvergiert.

Bsp $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, Alter. Harmonische Reihe.

Zur Untersuchung unendlicher Reihen auf Konvergenz oder Divergenz



§ 3. Stetige Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Menge, ein reellwertige Funktion ist eine Abbildung

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Die Menge alle auf D definierte Funktionen

$$\mathbb{R}^D := \{ f : D \to \mathbb{R} \mid f \text{ eine Funk.} \},$$

Falls $f, g \in \mathbb{R}^D$, $\lambda \in \mathbb{R}$, definiert man die Addition und skalare Multiplikation durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

$$\forall x \in D.$$

$(\mathbb{R}^D, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum.

Die Null Funktion,

die immer den Wert

0 annimmt.

d.h. $0(x) := 0 \quad \forall x \in D$

ist der Nullvektor.

Man definiert auch ein

Produkt zweier Funktionen

durch $(fg)(x) := f(x)\,g(x)$.

Für die konstante Funktion

$\mathbb{1}(x) := 1 \quad \forall x \in D$,

$(f \cdot \mathbb{1})(x) = f(x)$.

Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$

zwei Funktionen und

$\tilde{D} := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$,

dann definiert man

den Quotienten $\dfrac{f}{g} : \tilde{D} \to \mathbb{R}$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

Defn (Komposition, Verkettung von Funktionen)

$D, E \subset \mathbb{R}$

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen

mit $f(D) := \{ f(x) \mid x \in D \} \subset E$.

Die Komposition von g und f / g nach f

oder Verknüpfung von g und f

ist die Funktion

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(f(x))$$

Defn. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Abbildung.

1) f ist nach oben beschränkt falls die Menge der Bilder $f(D) \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist.

d.h. $\exists\, B \in \mathbb{R}$ so dass $f(x) \leq B$ $\forall x \in D$.

2) f ist nach unten beschränkt falls $f(D)$ nach unten beschränkt ist.

3) f ist beschränkt falls $f(D)$ beschränkt ist.

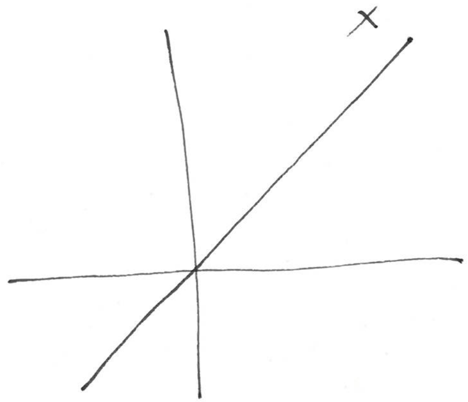
4) f ist (streng) monotone wachsend falls $\forall\, x,y \in D$

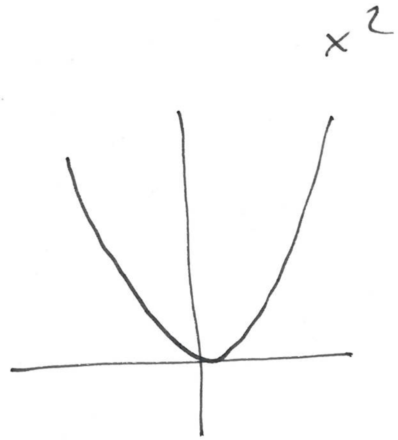
$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

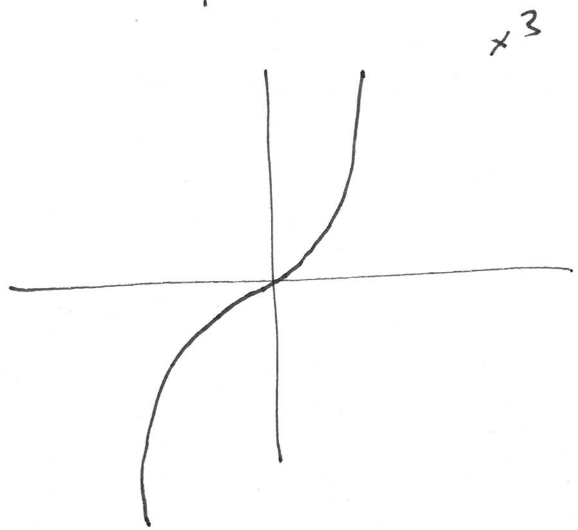
5) f ist mon. fallend falls $\forall\, x,y \in D, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

Bsp. $n \in \mathbb{N}$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to x^n$$

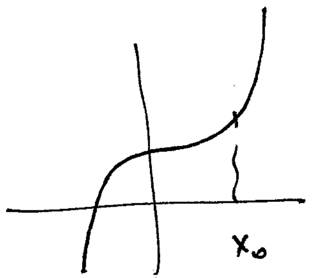


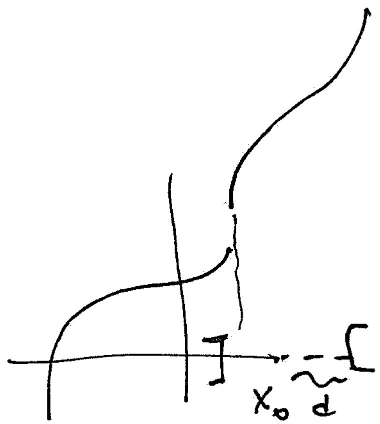




f ist streng mon. wach, falls n ungerade ist

§ 3.2. Stetigkeit





Defn. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in x_0 stetig falls es für jedes $\varepsilon > 0$, ein $\delta > 0$ gibt so dass für alle $x \in D$ die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

gilt.

(d.h. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

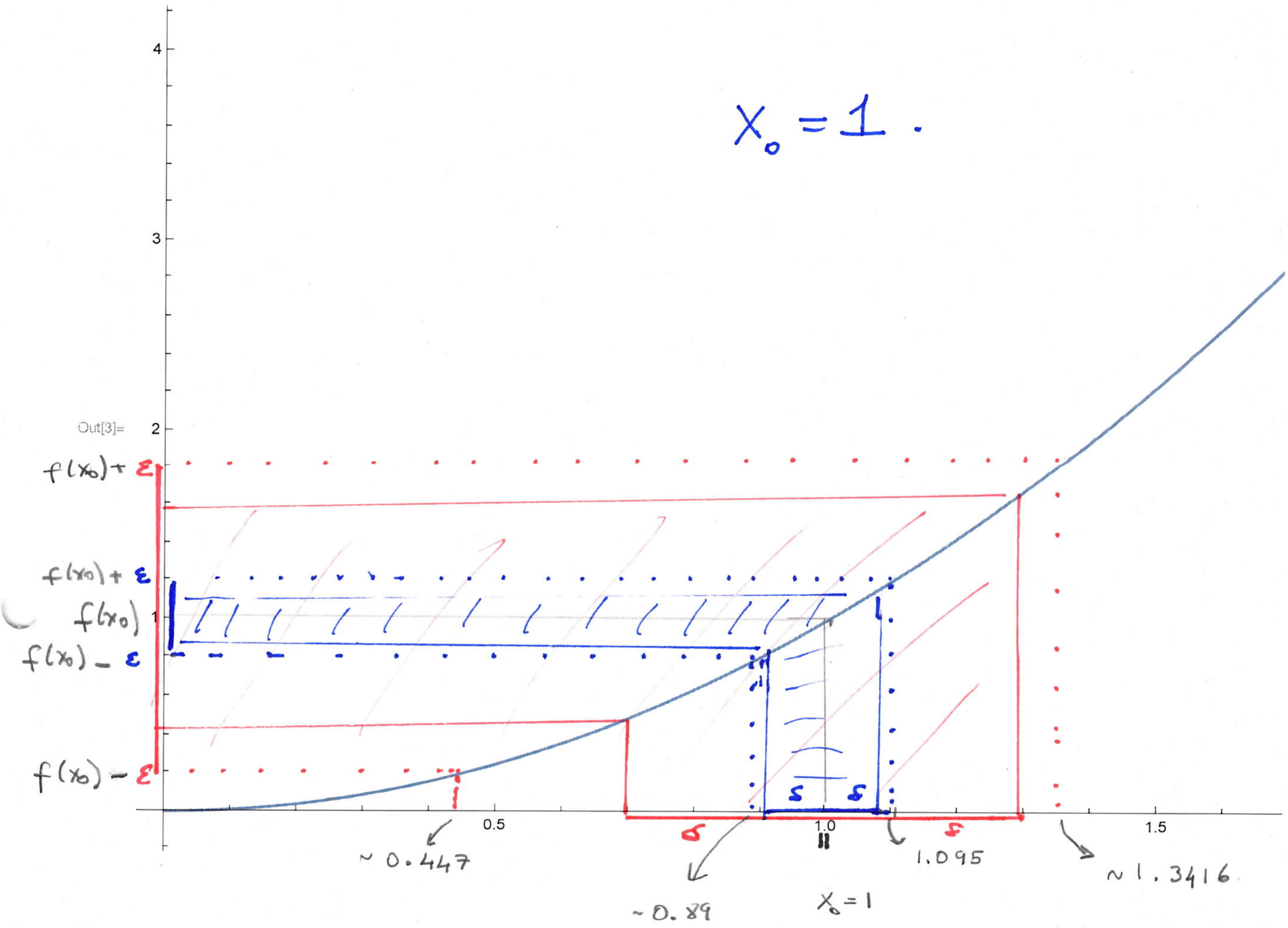
d.h.

$$f(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[) \subset$$

$$]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[.$$

In[3]:= `Plot[x^2, {x, 0, 2}]`

Out[3]=



$\varepsilon = 0.2 \Longrightarrow \delta$ kann als 0.09 gewählt werden.

$\varepsilon = 0.8 \Longrightarrow \delta$ kann als 0.3 gewählt werden.

- Der Funktionswert $f(x)$ unterscheidet sich $\underbrace{\text{beliebig wenig}}_{\varepsilon}$ von $f(x_0)$ wenn man sich der Stelle x_0 $\underbrace{\text{genügend nähert}}_{\delta}$.

- Für gegebene ε-Umgebung von $f(x_0)$, kann man eine δ-Umgebung von x_0 wählen, so dass Abstand zwischen $f(x)$ und $f(x_0)$ kleiner als ε ist, falls der Abstand von x zu x_0 kleiner als δ ist.

Bsp.: $f(x) = x$ ist stetig in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Falls $|x - x_0| < \delta$ ist,

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta$$

d.h. für gegebene $\varepsilon > 0$

kann man $\delta = \varepsilon$

wählen, dann gilt

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$\blacksquare$.

<u>Satz</u> Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$

$f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion

f ist genau dann in

x_0 stetig falls für

jede Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in D

mit $\lim a_n = x_0$ gilt

$\lim f(a_n) = f(x_0)$.

d.h.

f ist stetig in x_0

$\Updownarrow$.

$\forall (a_n)_{n \geq 1}$ mit $\lim a_n = x_0$

gilt $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n).}$

Beweis ($\Rightarrow$)

Annahme: $f(x)$ ist in x_0 stetig.

defn f stetig in x_0 (*)

Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$, haben wir $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

defn $\lim a_n = x_0$

Sei $N \geq 1$ so dass $|a_n - x_0| < \delta \quad \forall n \geq N$.

(Da $\lim a_n = x_0$).

Dann folgt aus (*) dass $|f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\forall n \geq N$.

d.h. $\lim f(a_n) = f(x_0)$.

$\overset{\text{defn}}{\Longrightarrow}$ $\lim f(a_n) = f(x_0)$.

($\Leftarrow$) Übung.

Mit diesem Kriterium der Stetigkeit und aus dem Rechnenregeln für konvergente Folgen.

$$\left(\begin{array}{l} \lim a_n = a \\ \lim b_n = b \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} \lim a_n + b_n = a+b \\ \lim a_n b_n = ab \\ \lim \lambda a_n = \lambda a \end{array} \right)$$

erhalten wir:

<u>Kor</u>: Sei $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$ beide stetig in x_0.

Dann sind

$$f+g, \quad \lambda f, \quad fg$$

stetig in x_0.

Falls $g(x_0) \neq 0$, dann ist

$$\frac{f}{g}: D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in x_0.

Beweis: Sei (a_n) eine Folge

$\lim a_n = x_0$

f stetig $\Longrightarrow$

$\lim f(a_n) = f(x_0)$

g stetig $\Longrightarrow$ $\lim g(a_n) = g(x_0)$

Um stetigkeit von $f+g$ in x_0 zu beweisen wir brauchen dass

$$\lim (f+g)(a_n) = (f+g)(x_0)$$

$$\overset{\shortparallel}{=} \lim \big(f(a_n) + g(a_n)\big) = \lim f(a_n) + \lim g(a_n)$$

$$f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$$

Defn. Eine Polynomiale Funktion $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form

$$P(x) := a_n x^n + \dots + a_0$$

wobei $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

Falls $a_n \neq 0$, ist n der Grad von P (degree of P).

Kor ~~[illegible]~~. Alle Polynome Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Kor Seien P, Q zwei Poly. Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $Q \neq 0$. Seien $x_1, \dots x_m$ die Nullstellen von Q. Dann ist

$$\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

stetig für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots x_m\}$.

Bsp. 1) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

ist stetig in jedem Punkt ausserdem. $x=1$

2) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

ist stetig in $\mathbb{R}$.

~~Satz~~

Mittels Stetigkeitskriterium mit Folgen, kann man auch zeigen dass für stetige Funktionen f und g/

(falls definiert) auch $g \circ f$ stetig ist.

Satz $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ zwei Teilmengen,

$f : D_1 \longrightarrow D_2$

$g : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$

zwei stetige Funktionen sowie $x_0 \in D_1$ so ist $g \circ f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 stetig.

Lemma Sei $D \subset \mathbb{R}$ $x_0 \in D$, f, g stetig in x_0. Dann sind $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$

$\left(\max\{f, g\} \right)(x) := \max\{f(x), g(x)\}$

stetig in x_0.

Beweis: Übung.

<u>Bsp.</u>

Die Indikatorfunktion der Rationalen Zahlen

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in <u>keinem</u> Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig

Sei $A \subset \mathbb{R}$.

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$