# Stetigkeit einer Funktion.

**Defn**
- Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.

Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist in $x_0$ stetig falls

$\forall \varepsilon > 0$, ein $\delta > 0$ gibt so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt.

$\varepsilon$-$\delta$ Kriterium für Stetigkeit

i.e $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, so dass

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

- $f$ heisst stetig in $D$, falls ist sie stetig in $x_0$, $\forall x_0 \in D$.

**Satz** ($f: D \to \mathbb{R}$ ist in $x_0$ stetig)

$\iff$ ( $\forall (a_n)_{n \geq 1}$ mit $\lim a_n = x_0$

gilt $f(x_0) = f(\lim a_n)$

$= \lim f(a_n)$ )

d.h Stetigkeit in $x_0 \iff$

$$\boxed{\lim f(a_n) = f(\lim a_n) \quad \forall (a_n)_{n \geq 1} \text{ mit } \lim a_n = x_0}$$

Folgenkriterium der Stetigkeit

**Satz.** Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0$. Dann sind

$f+g$, $\lambda f$, $fg$ stetig

- Falls $g(x_0) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g} : D \cap \{x \in D \mid g(x_0) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x)/g(x)$ stetig in $x_0$

**Kor:** • Jede Polynome sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig

- Seien $P, Q$ poly. Funktionen mit $Q \neq 0$. Seien $x_1, \dots x_m$ die Nullstellen von $Q$. Dann ist $\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto P(x)/Q(x)$

stetig $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$

**Satz.** Seien $f : D_1 \longrightarrow D_2 \subset \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann ist $g \circ f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

- Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann sind

$|f|$, $(\max\{f, g\})$, $\min\{f, g\}$

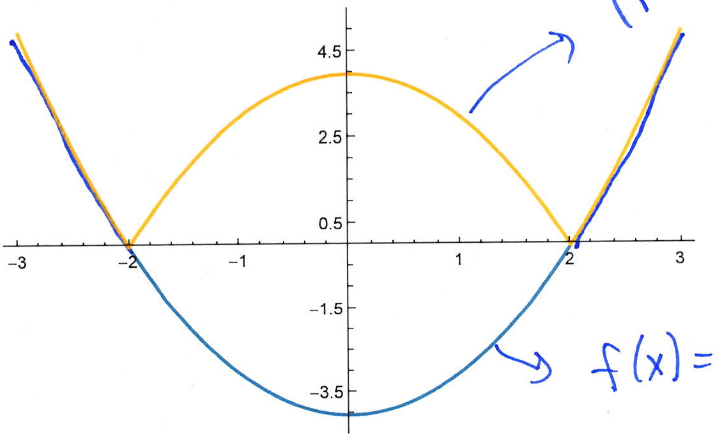
stetig in $x_0$

$(\max\{f, g\})(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ $\forall x \in D$.

In[8]:= `Plot[{x^2 - 4, Abs[x^2 - 4]}, {x, -3, 3}]`

$|f(x)|$

Out[8]=

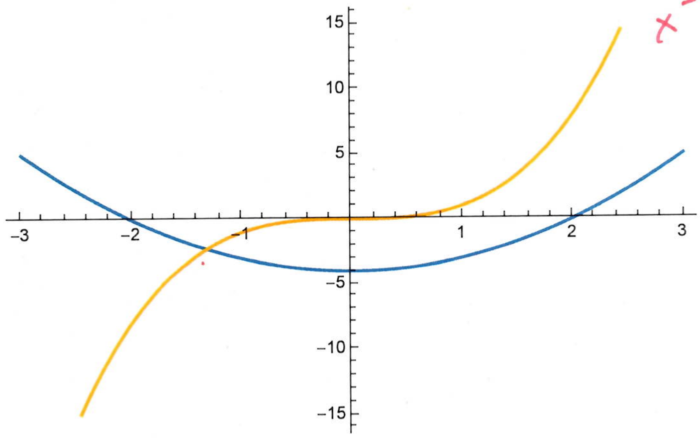



$f(x) = x^2 - 4$

In[11]:= `Plot[{x^2 - 4, x^3}, {x, -3, 3}]`

$x^3$.

Out[11]=

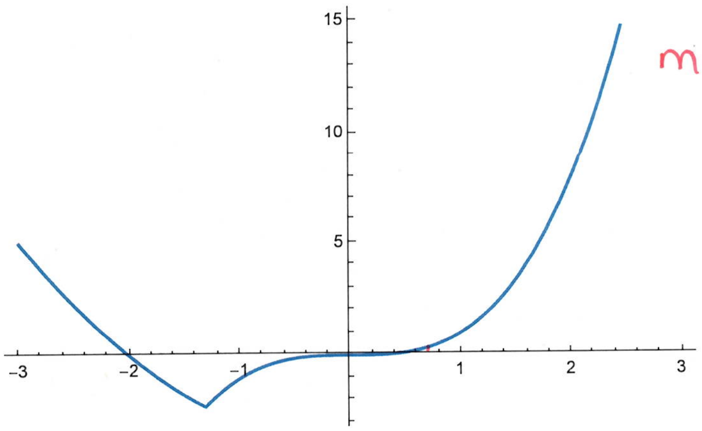



$x^2 - 4$

In[12]:= `Plot[ Max[x^2 - 4, x^3], {x, -3, 3}]`

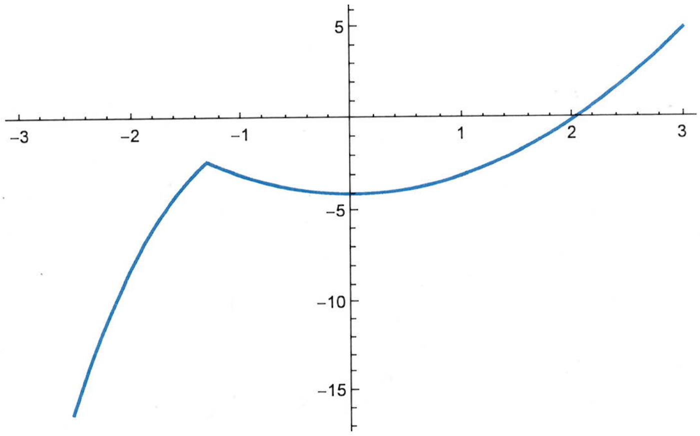
$\max\{x^2-4, x^3\}$.

Out[12]=



```
In[13]:= Plot[ Min[x^2 - 4, x^3], {x, -3, 3}]
```

Out[13]=




14.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \,, \qquad \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell .$$

Cauchy Produkt:

$$c_n := \sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n . \quad \underset{\text{Cauchy Produkt}}{\text{``}=:\text{''}} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$$

Satz 2

Falls $\sum a_k$, $\sum b_\ell$

abs. konv.

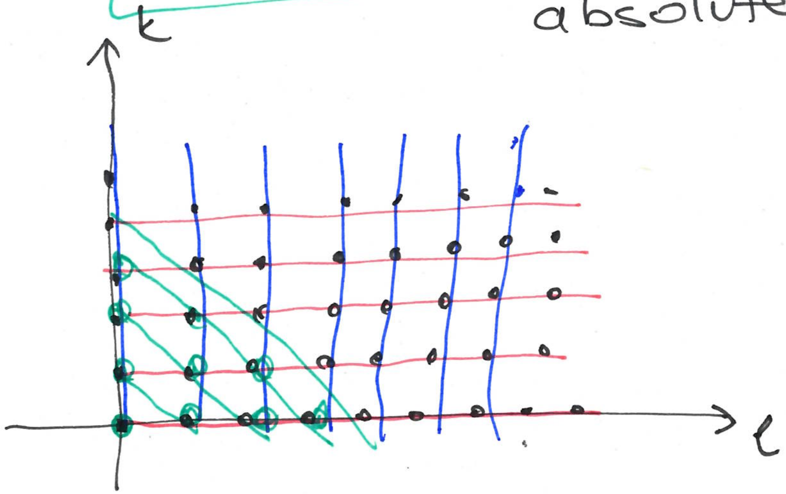
Dann konvergieren

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_k b_\ell}$$

$$= \boxed{\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_\ell .}$$

$$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \right)}$$

absolute.



$$\sum \frac{(-1)^n}{n} = \sum a_k$$

$$\sum c_n \quad \text{does } \underline{\text{not}} \text{ converge.}$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n} = \sum b_j$$

Cauchy Produkt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \text{wobei}$$

$$c_n := \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j$$

# Clicker Frage

$$\sum a_i = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$$

$$a_i := \begin{cases} 2 & i = 0 \\ 2^i & i = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\sum b_j = -1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

$$b_j := \begin{cases} -1 & j = 0 \\ 1 & j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = -2 + 0 + 0 + \dots$$

$$c_n := \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\, b_j$$

$$c_0 = a_0 b_0 = 2 \cdot -1 = -2$$

$$c_n = -2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^1 + 2.$$

$$=: \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\, b_j$$

$$= (2 + 2^1 + \dots 2^{n-1}) - 2^n.$$

$$= \left[1 + (1 + 2^1 + \dots + 2^{n-1})\right] - 2^n$$

$$= \left[1 + \frac{1-2^{n}}{1-2}\right] - 2^n = 0.$$

**Bsp.** Die Indikatorfunktion der Rationalen Zahlen

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) \left( \chi_{\mathbb{Q}}(x) \right)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

ist in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig.

**Beweis:** Sei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Sei $x_k$ die an der ~~k-stelle~~ k-ten Nachkommastelle abgebrochene Dezimaldarstellung von $x_0$.

z.B. $x_0 = \pi$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 3.1 = 3 + \frac{1}{10} = \frac{31}{10}.$$

$$x_3 = 3.14 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100}$$

$$\vdots$$

$x_n \in \mathbb{Q}$! und $\lim x_k = x_0$.

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_n) = 1$$

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_0) = 0.$$

$$\lim \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_n) = \lim 1 = 1.$$

$$\left(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_n)\right)_{n\geq 1} = 1, 1, 1 \ldots$$

$$1 = \lim \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_n) \neq \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(\lim x_n)$$
$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_0) = 0.$$

d.h. für $x_0$, eine Irrational Zahl ist $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ nicht stetig.

Sei $x_0 \in \mathbb{Q}$.

übung.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $x_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ so dass

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$$

Somit die Folge $x_n$ konvergent gegen $x_0$.

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_n) = 0$$

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(\lim x_n) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_0) = 1.$$

$\Rightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ ist nicht stetig in $x_0 \in \mathbb{Q}$.

## §3.3 Der Zwischenwertsatz

~~Satz~~ Seien $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

Dann liegt $c \in \mathbb{R}$

zwischen $y_1$ und $y_2$

falls 1) $y_1 \leq y_2$, $c \in [y_1, y_2]$

2) $y_2 \leq y_1$, $c \in [y_2, y_1]$

**Satz (Zwischenwertsatz).**

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall

$f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige

Funktion auf $I$.

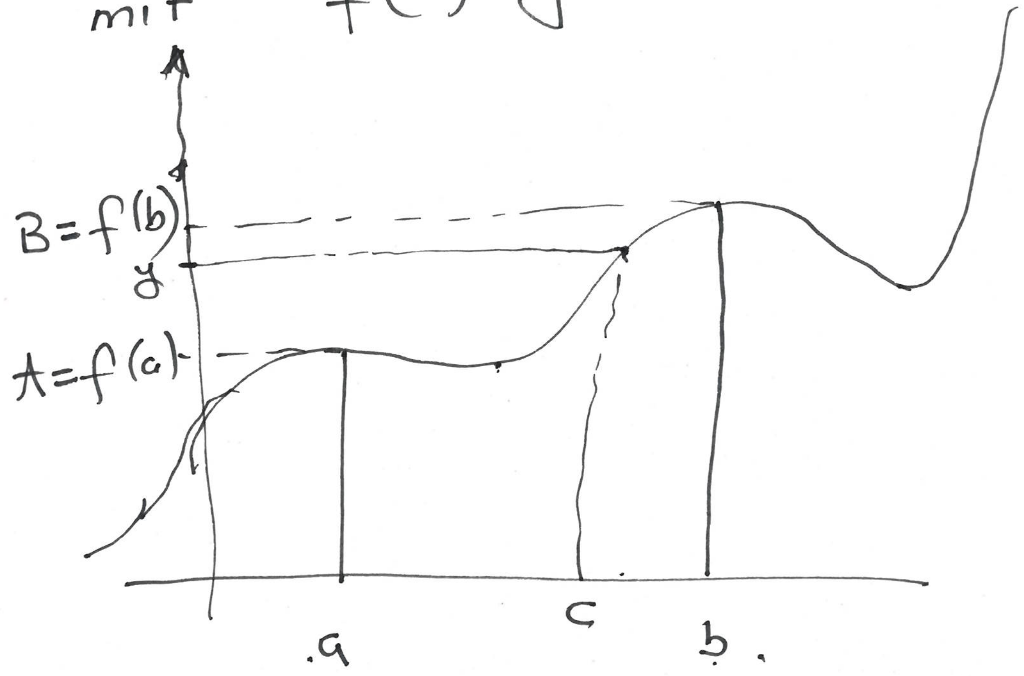
Für jedes $y$ zwischen

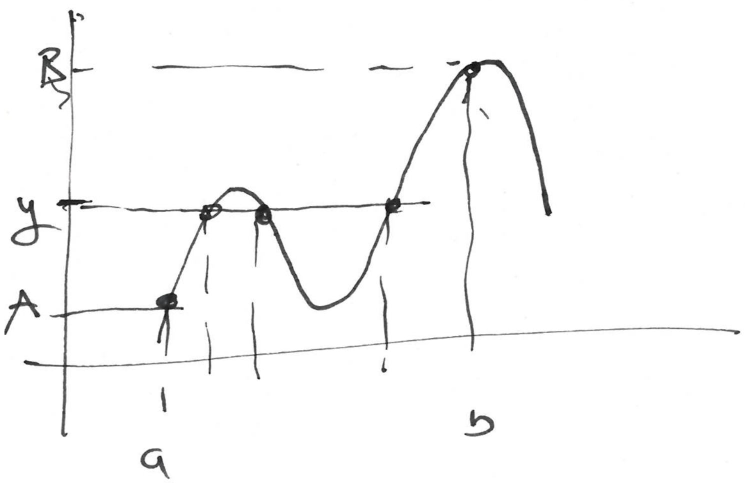
$f(a)$ und $f(b)$

gibt es (mindestens)

ein $c$ zwischen $a$ und $b$

mit $f(c) = y$.






**Beweis.** Ohne Einschränkung der Allgemeinheit (OE d. A) nehmen wir an dass

$a < b$ und $f(a) \leq f(b)$.

Sei also $f(a) \leq y \leq f(b)$

**Idee:** Wir benutzen ein Bisektionsverfahren

Wir definieren 2 monot. Folgen

$$a = a_1 \leq a_2 \leq \ldots \ldots a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq b_1 = b.$$

$a_n \nearrow$ mon. wach.

$b_n \searrow$ mon fallend.

mit $\lim a_n = c = \lim b_n$.

und $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$.

Dann aus ~~Stetigkeit~~ Stetigkeit der Funktion $f$ folgt

$$\lim f(a_n) \le y \le \lim f(b_n)$$

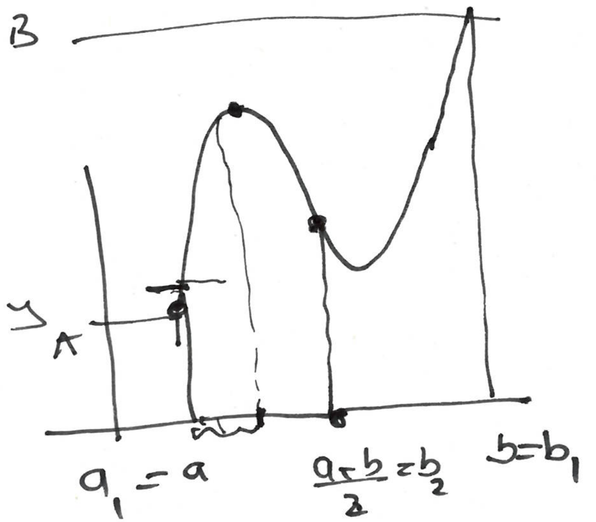
$\Downarrow$ stetigkeit $\qquad \Downarrow$ stetigkeit

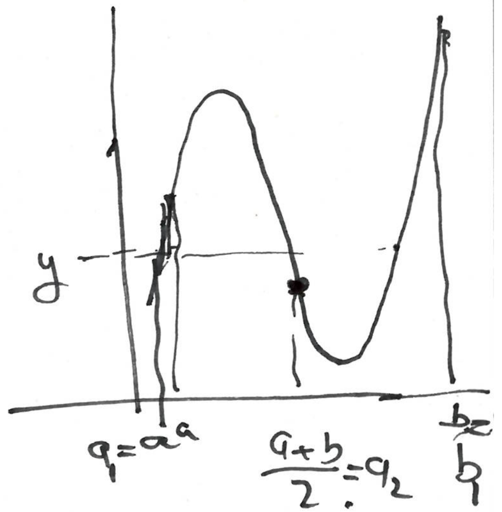
$$f(\lim a_n) \le y \le f(\lim b_n).$$

$$f(c) \le y \le f(c)$$

$$\Rightarrow y = f(c)$$

Um die Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$ zu definieren betrachten wir 2 Fälle.




**Fall 1**

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \ge y$$

Setzen wir

$$a_2 = a_1 = a$$

$$b_2 = \frac{a+b}{2} = \frac{a_1+b_1}{2}$$

**Fall 2**

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le y$$

Setzen

$$b_1 = b_2$$

$$a_2 = \frac{a+b}{2} = \frac{a_1+b_1}{2}.$$

Auf jedem Fall gilt

(1) $a_1 \le a_2 < b \le b_2$.

(2) $b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2}$.

(3) $f(a_2) \le y \le f(b_2)$

Wir iterieren jetzt dieses Verfahren. Wir nehmen an, dass wir Folgen definiert haben nach $(k-1)$ Schritten mit

(1) $a = a_1 \le a_2 \le a_2 \dots < a_k < b_k \le b_{k-1} \dots \le b_1 = b$.

(2) $b_k - a_k = \dfrac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \dots = \dfrac{\overset{b}{\overset{\|}{b_1}} - \overset{a}{\overset{\|}{a_1}}}{2^{k-1}}$

(3) $f(a_k) \le y \le f(b_k)$.

Nach Induktion erhalten wir zwei Folgen $(a_n)_{n\ge1}$, $(b_n)_{n\ge1}$ die Eigenschaften (1), (2), (3) erfüllen.

$(a_n)$, $(b_n)$ sind monotone

und beschränkt

$\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ beide

mon. konv. Satz

konvergieren.

Nach (2)

$$\lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}\right)$$

$$= 0.$$

$\Rightarrow \lim b_k = \lim a_k =: c$

$a \leq a_k \leq b$ $\Rightarrow$ $a \leq \lim a_k \leq b$

$a \leq b_k \leq b$ $\quad$ $a \leq \lim b_k \leq b$

$c \in [a, b]$.

Aus Stetigkeit von $f$

folgt

$$f(c) = f(\lim a_n)$$
$$= \lim f(a_n)$$
$$= f(\lim b_n)$$
$$= \lim f(b_n).$$

Aus (3). $\quad f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$

$$\begin{array}{ccccc} f(a_n) & \leq & y & \leq & f(b_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f(c) & & \text{Sandwichsatz} & & f(c) \end{array}$$

$f(c) = y$.

$a_1, \ldots a_n - - -$

$(a_n)_{n\geq 1}$ , $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$a_n \to \boxed{f} \to f(a_n) \to \boxed{\lim} \to \lim f(a_n)$$

$$\| \ \text{stetigkeit}$$

$$a_n \to \boxed{\lim} \to \lim a_n \to \boxed{f} \to f(\lim a_n)$$

Folgerungen der

Zwischenwert Satz

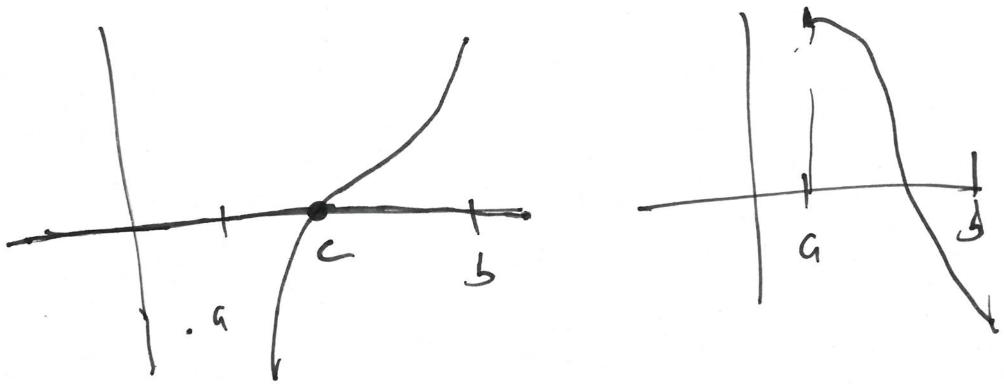
① · Sei $f$ stetig

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Falls $f(a) f(b) < 0$

dann $\exists\, c \in ]a, b[$

mit $f(c) = 0$.



② Sei $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$

ein Poly mit $a_n \neq 0$

und $n$ ungerade

Dann besitzt $P$ mindestens

eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Beweis. Übung.

Bmk $n$ ungerade ist

wichtig. z.B $x^2 + 1$

hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

**Kor** Jede 3x3 Matrix $A$ mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ hat mindestens eine Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$.

## § 3.4. Der Min-Max Satz

**Defn.** Ein Interval $\subset \mathbb{R}$ ist <u>kompakt</u>, falls es von der Form

$$I = [a, b], \quad a \leq b$$

ist

(min-max Satz)

**Satz.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakte Interval. Dann gibt es $u \in [a, b]$ und $v \in [a, b]$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v)$$

$\forall x \in [a, b]$.

Insbesondere ist $f([a, b])$ beschränkt.

$$f(u) = \min_{[a,b]} f \qquad f(v) = \max_{[a,b]} f.$$

d.h. Sup. und Inf. von $f$ ist angenommen.

**Kor** Sei $f: I \to \mathbb{R}$

$I = [a, b]$ kompakte Interval

$f$ stetig. Dann

$\mathrm{Bild}\, f = f(I)$

ist auch ein kompakte

Interval $J = [\min f, \max f]$.

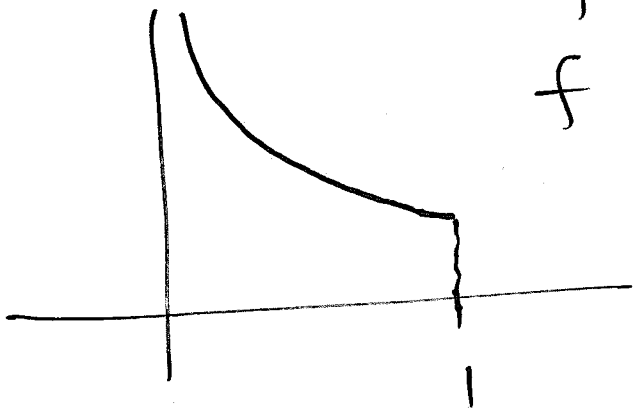
**Bmk**. Kompaktheit von $[a, b]$ ist wichtig!

(a) $f: ]0, 1] \to \mathbb{R}$.

$x \mapsto \frac{1}{x}$

$f$ ist stetig

$f$ hat kein Max

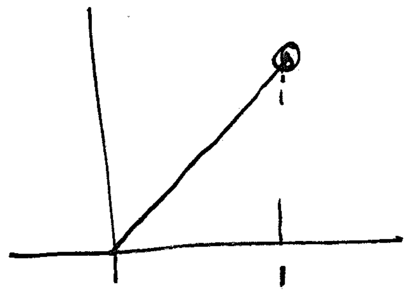


(b). $f: [0, 1[ \to \mathbb{R}$

$x \to x$

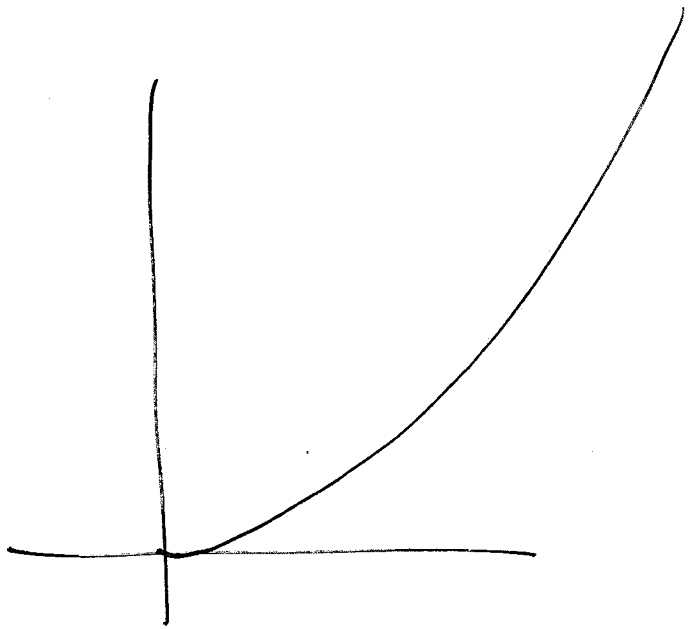
$\sup f([0,1[) = 1$

kein Max.



(c) $f : [0, \infty[ \to \mathbb{R}$

$x \longrightarrow x^2$



ist stetig aber

nicht beschrankt.

und kein max.