6.4.12

f ist **stetig** in $x_0 \in D$, $f: D \to \mathbb{R}$

$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D$

$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\iff \forall (a_n)_{n \geq 1}$ mit $\lim a_n = x_0$:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)$$

Satz: $f, g: D \to \mathbb{R}$ beide stetig in $x_0 \in D$. Dann

① fg, λf, $f \pm g$ sind stetig in x_0.

② $\frac{f}{g}: D \setminus \{x \in D \mid g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ ist stetig in x_0 (falls $g(x_0) \neq 0$).

③ $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ sind stetig in x_0.

Kor ① $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

② $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots x_m\}$ stetig wobei $x_1, \dots x_m$ Nullstelle von $Q(x)$ sind.

Bsp. $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Indikatorfunktion der Rationale Zahlen

ist in keinem Punkt stetig.

Satz $f: D \to E$, $g: E \to \mathbb{R}$

f ist stetig in x_0,

g ist stetig in $f(x_0)$.

Dann ist $g \circ f: D \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig.

Satz (Zwischenwertsatz)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Interval, $a, b \in I$, $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige funktion auf I.

Für jedes y zwischen $A = f(a)$ und $B = f(b)$ gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = y$.

Kor Sei $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$ und n ungerade. Dann besitzt P mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Bmk. "ungerade" ist wichtig!

z.B X^2+1 hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Min-Max Satz

Satz Sei $f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf kompakte Interval $[a,b]$. Dann gibt es $u \in [a,b]$ and $v \in [a,b]$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v), \quad \forall x \in [a,b].$$

Insbesondere $f([a,b])$ ist beschränkt. $\subset [f(u), f(v)]$

Beweis:

Behauptung: $f([a,b])$ ist beschränkt.

Beweis: Falls nicht, so gibt es $\forall n \in \mathbb{N}$ ein $t_n \in [a,b]$ mit $f(t_n) > n$.

$(t_n)_{n\geq 1} \subset [a,b]$ ist beschränkt.

Nach Bolzano Weierstrass, eine Teilfolge $(t_{\ell(n)})$ gibt, die konvergent ist

Sei $\lim(t_{e(n)}) =: x_0$

Da $a \leq t_{e(n)} \leq b$

und damit folgt dass

$x_0 \in [a,b]$.

Aus Stetigkeit von f

folgt dass

$$\lim(f(t_{e(n)})) = f(\lim(t_{e(n)})) = f(x_0).$$

d.h die Folge

$(f(t_{e(n)}))$ ~~kon~~ ist

konvergent mit Grenzwert

$f(x_0)$.

Insbesondere

$f(t_{e(n)})$ ist

beschränkt

Aber dies ist ein

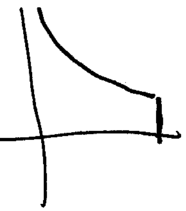
Widerspruch zu

$f(t_{e(n)}) > e(n)$. ↯.

d.h. $f([a,b])$ ist

beschränkt.

$$\left(\begin{array}{l} f: \,]0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto 1/x \\ f(]0,1]) = [0,\infty[\\ \text{kein sup, kein Max.} \end{array} \right)$$



Da $f([a,b])$ beschränkt ist

$\sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$

existiert.

Sei $M := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$

z.z. $\exists\, v \in [a,b]$

so dass

$f(v) = M.$

d.h Das Supremum ist angenomen.

Für jedes $n \geq 1$ sei

$x_n \in [a,b]$ mit $M - \frac{1}{n} \leq f(x_n)$.

Da $M - \frac{1}{n}$ kein sup.

Dann haben wir für jede $n \geq 1$ eine Punkt $x_n \in [a,b]$ so dass

$$M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M.$$

Da $(x_n)_{n\geq 1} \in [a,b]$ beschränkt ist. Nach Bolzano Weierstrass

$\exists$ Teilfolge $(x_{\ell(n)})$ der konvergent ist, mit Grenzwert $v \in [a,b]$.

$\lim x_{\ell(n)} =: v.$

Aus Stetigkeit von f

folgt

$$\lim f(x_{\ell(n)}) = f(\lim x_{\ell(n)}).$$
$$= f(v)$$

$$\begin{array}{ccccc} M - \frac{1}{\ell(n)} & \leq & f(x_{\ell(n)}) & \leq & M. \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M. & \leq & f(v) & \leq & M \end{array}$$

$$\Rightarrow f(v) = M$$

Das Sup ist angenommen.

<u>Kor</u>: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetige Funktion auf kompakte Intervall $I = [a, b]$. Dann Bild $f = f(I)$ ist auch ein Interval

$$J = [\min f, \max f].$$
$$= [f(u), f(v)].$$

und J ist auch kompakt.

§ 3.5 Der Satz über Umkehrabbildung

Satz (Umkehrabbildungssatz)
Sei I ein Interval
$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf I.
f ist streng monotone (wachsend). Dann
ist das Bild von f
$f(I) =: J$ ~~ist~~ ein Interval und die Umkehrfunktion
$f^{-1}: J \to I$
ist auch streng monotone und stetig.

Folgerungen:

Bsp. Sei $n \geq 1$

Dann ist

$$f: [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[.$$
$$x \longmapsto x^n$$

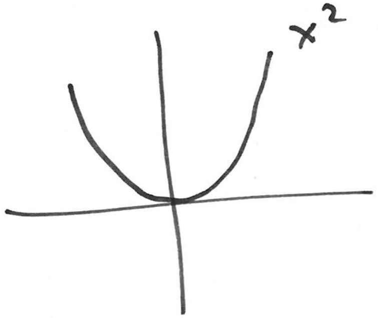
streng monotone wachsend stetig, surjektive
Übung.

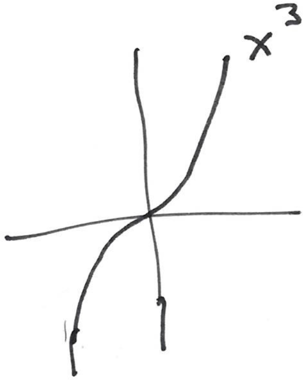
Nach dem Umkehrabb. Satz, existiert eine stetige und streng mon. wachsende Umkehrfunktion.

$[0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$

$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$

genannt die **n-te Wurzel**.





Um streng monotonie zu sehen.

z.z $y > x \Longrightarrow y^n > x^n$.

Für $x, y > 0$

$$y^n - x^n = (y-x)\underbrace{(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1})}_{>0}$$

Aus $y > x$ folgt dass

$y - x > 0$

Damit $y^n > x^n$.

§ 36. Die Exponential Funktion und Ihre Umkehrfunktion.

Satz: $\exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ ist streng mon. wachsend, stetig und surjektiv.

Beweis. $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

Behauptung 1 $\forall x \in \mathbb{R}$
$\exp(x) > 0$.
d.h $\exp(\mathbb{R}) \subset]0, \infty[$.

Beweis 1

Falls $x \geq 0$

$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

$\geq 1 > 0$.

Damit $\exp(x) \geq 1$
falls $x \geq 0$.

Wir wissen auch $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y)$

wegen
$\exp(x) \exp(-x) = \exp(x-x)$
$= 1$.

$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} > 0$
falls $x \geq 0$.

Dann folgt

dass $\exp(-x) > 0$

und damit

$$\exp(\mathbb{R}) \subset \,]0,\infty[. \qquad \boxtimes$$

Behauptung 2. exp ist streng monoton wachsend.

z.z $\forall\, z>y$,

$$\exp z > \exp y$$

Falls $z>y$, dann

$(z-y)>0$ und

$$\exp(z-y) > 1$$

Dann $\exp(z) = \exp(z+y-y)$

$$= (\exp y)\underbrace{\exp(z-y)}_{>1}$$

$$\Rightarrow \exp z > \exp y. \qquad \boxtimes.$$

Behauptung 3 Stetig

Zuerst zeigen wir Stetigkeit im Punkt $x=0$.

Für $|x| \le 1$, $n \in \mathbb{N}$

gilt $|x|^{n-1} \le 1$

$$|(\exp x) - (\exp 0)| = |(\exp x) - 1|$$

$$= \left|\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) - 1\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right|.$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x||x^{n-1}|}{n!}$$

$$\leq |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n-1}}{n!} \leq |x| \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)}_{e-1}$$

$$e \stackrel{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$|\exp(x) - 1| < (e-1)|x|$$

sei nun $(x_n) \to 0$

dann $|\exp(x_n) - 1| \leq (e-1)|x_n|$

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} \leq |\exp(x_n) - 1| \leq \underset{\downarrow \atop 0}{|x_n|(e-1)}$$

mit Sandwichsatz $|\exp(x_n) - 1| \to 0$

d.h.

$\exp(x_n) \to 1$.

mit Folgenkriterium

$\exp(x)$ ist im Punkt $x_0 = 0$ stetig.

Stetigkeit in $x_0 \in]-\infty, \infty[$.

Sei $x_n \to x_0$ eine konv. Folge.

z.z. $\exp(x_n) \to \exp(x_0)$

$$\exp(x_n) = \exp(x_n - x_0 + x_0)$$
$$= \exp(x_n - x_0) \exp x_0.$$

$x_n - x_0 \to 0$. Wir haben schon bewiesen dass exp ist im punkt ~~x_0~~ 0 stetig.

d.h

falls $a_n \to 0$

$$\exp(a_n) \to \exp(0) = 1.$$

Somit

$$\underbrace{\exp(x_n) = \exp(\overbrace{x_n - x_0}^{a_n})(\exp x_0)}$$

$$\downarrow$$

$$1 \cdot \exp(x_0)$$

$$\Rightarrow \exp(x_n) \to \exp(x_0)$$

$\Rightarrow$ exp ist stetig in jede Punkt x_0.

Behauptung 3.

Surjektivität:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + 1 = 2.$$

Somit $e \geq 2$.

Daraus folgt

$$\underbrace{e \cdot e \cdots e}_{n \text{ mal}} \geq \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ mal.}}$$

$$e^n \geq 2^n.$$

und $\exp(-n) = \dfrac{1}{\exp n} = e^{-n}$

$$\leq 2^{-n}.$$

$\exp(n) \geq 2^n$

$\exp(-n) \leq 2^{-n}$

Nach Zwischenwert Satz

$[2^{-n}, 2^n] \subset \exp([-n,n])$

$\Longrightarrow$

$]0,\infty[= \bigcup_{n\geq 1} [2^{-n}, 2^n]$

$\subset \exp(\bigcup [-n,n]) = \exp(]-\infty,\infty[)$

$\subset]0,\infty[$

Dann folgt dass $\exp(\mathbb{R}) =]0,\infty[$

Wir wissen nun dass

$\exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$

ist streng mon. wachsend, stetig, surjektive

Nach Umkehrabbildung Satz die Umkehrfunktion von exp. ist auch stetig, streng mon. wachsend.

Wir Nennen ~~...~~ die Umkehrfunk. von exp; ~~N~~atürliche log.

Kor Der Natürliche Logarithmus

$\ln :]0,\infty[\to \mathbb{R}$

(oder log) ist eine streng mon wachsende, stetige bijektive Funktion. Des weiteren gilt

1. $\ln 1 = 0$ und
2. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\forall a,b \in]0,+\infty[$

Beweis $\exp(\ln x) = x$

$\exp(\ln x + \ln y)$

$= \exp(\ln x) \cdot \exp(\ln y)$

$= xy$

Da exp Umkehrfunk von ln ist

$xy = \exp(\ln(xy))$

Damit

$\exp(\ln x + \ln y)$

$= \exp(\ln(xy))$.

Da exp. injektive ist.

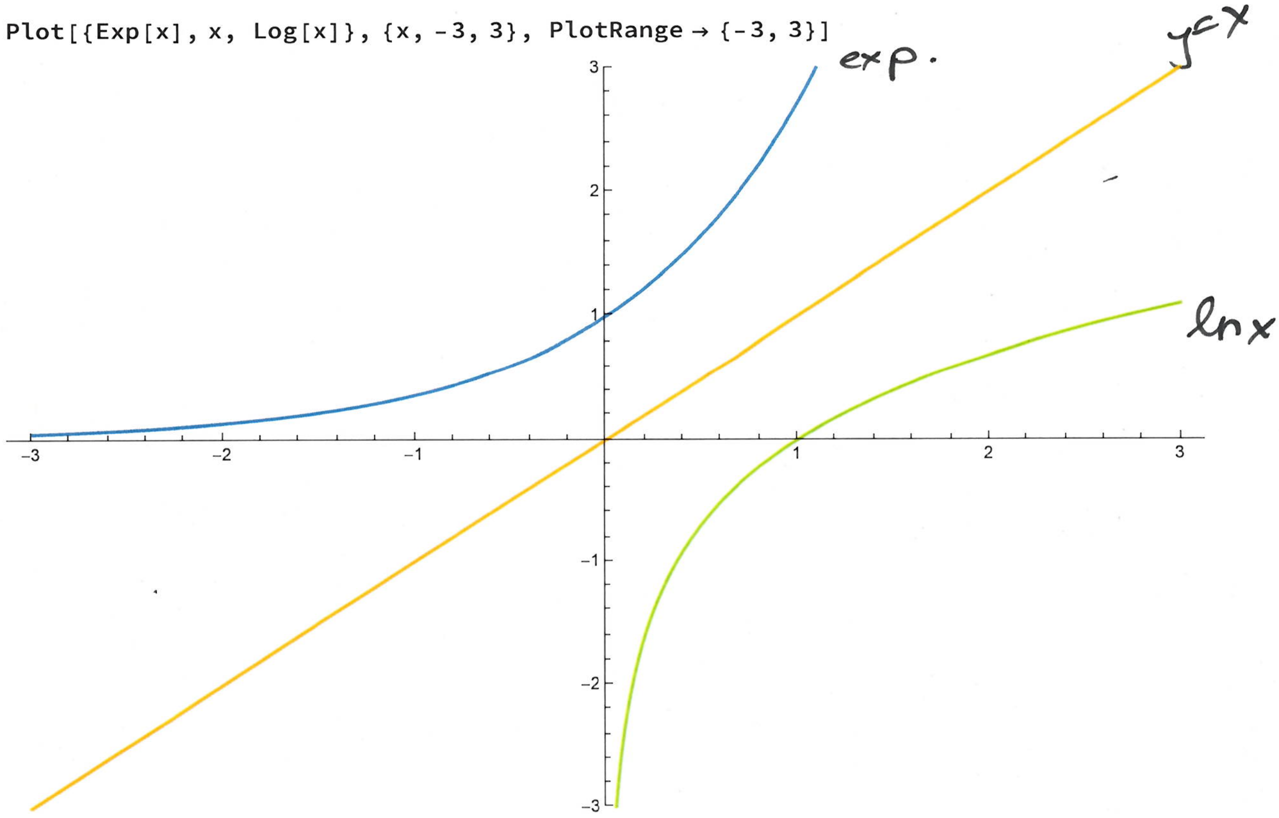
$\boxed{\ln x + \ln y = \ln xy}$.

(Stetigkeit, streng mon. der Natürliche Logarithmus folgt aus Umkehrabb. Satz).

$\boxed{\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)}$

```
In[17]:= Plot[{Exp[x], x, Log[x]}, {x, -3, 3}, PlotRange → {-3, 3}]
```

Out[17]=



Wir können nun Logarithmus und Exponentialfunktion benützen, um allgemeine Potenzen zu definieren.

Für $x>0$, $a\in\mathbb{R}$, definieren wir

$$x^a := \exp(a\ln x).$$

Insbesondere $x^0 = 1$ $\forall x>0$.

<u>Satz</u>: 1) Für $a>0$ ist

$$]0,\infty[\to]0,\infty[.$$
$$x \mapsto x^a$$

eine stetige, streng mon. wach. Bijektion

2) Für $a<0$,

$$]0,\infty[\to]0,\infty[$$
$$x \mapsto x^a$$

ist eine stetige streng mon. fallende Bijektion.

3) $\ln(x^a) = a\ln x$ $\forall a\in\mathbb{R}$ $\forall x\geq 0$

4) $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ $\forall a,b\in\mathbb{R}$ $\forall x>0.$

5) $(x^a)^b = x^{ab}$