Satz (Zwischenwertsatz - ZWS)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Interval $a, b \in I$, $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige funktion auf I.
Für jedes y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = y$

Satz (min - max Satz)

Sei $f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf kompakte Interval $[a,b]$. Dann gibt es $u \in [a,b]$ und $v \in [a,b]$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall\, x \in [a,b]$$

Insbesondere $f([a,b])$ ist beschränkt. Bild $f = f(I)$ ist auch ein Interval.
$f(I) = J = [f(u), f(v)]$ ist auch kompakt.

Satz (Umkehrabbildung satz)

Sei I ein Interval $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monotone (wachsend). Dann ist das Bild von f, $f(I) := J$ ein Interval, und die Umkehrfunktion

$f^{-1}: J \to I$ ist auch

streng monotone (wachsend)

und stetig

Bsp ① Sei $n \geq 1$. Dann

ist $f: [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$
$x \longmapsto x^n$

streng mon. wachsend, stetig

surjektive. Nach dem Umkehrabb.

Satz, existiert eine stetige

und streng mon. wachsende

Umkehrfunktion, genannt die

n-te Wurzel

$[0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$
$x \longrightarrow x^{1/n}$.

Exponential Funktion

Satz $\exp: \mathbb{R} \to]0, \infty[$

ist streng mon. wachsend

stetig, surjektive.

Defn Die Umkehrfunktion von

$\exp(x)$ heisst die

Natürliche Logarithmus

$\ln:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.
$x \longmapsto \ln x$

Kor ln ist eine

streng mon. wachsende

stetige bijektive Funktion

① $\ln 1 = 0$ ② $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

$\forall a, b \in]0, \infty[$ 12

Defn Für $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$

definieren wir

$$\boxed{x^a := \exp(a \ln x)}$$

Insbesondere $x^0 = 1$ $\forall x > 0$.

Satz 1) Für $a > 0$ ist

$$]0,\infty[\longrightarrow]0,\infty[$$
$$x \longmapsto x^a$$
eine stetige, streng mon. wachsende Bijektion

2) Für $a < 0$ ist
$$]0,\infty[\longrightarrow]0,\infty[$$
$$x \longrightarrow x^a$$
eine stetige, streng mon. fallende Bijektion

3) $\ln(x^a) = a \ln x$

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall x > 0$

4) $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$

$\forall x > 0$

5) $(x^a)^b = x^{ab}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$\forall x > 0$

Beweis. 1)

$x \longmapsto \ln x$ streng mon. wachsend.

$a > 0$, somit

$x \longmapsto a \ln x$ ist streng mon. wachsend.

$x^a := \exp(a \ln x)$

Da $x \longmapsto \exp x$ streng mon. wachsend ist, folgt das

$x \longmapsto \exp(a \ln x) =: x^a$

auch streng mon. wachsend ist.

$x \mapsto x^a$ ist Verknüpfung von stetiger Funktionen und deswegen ist sie auch stetig.

2) Übung.

3) $\ln x^a = \ln(\exp(a \ln x))$

$= a \ln x$ (Da exp, ln sind umkehr funktionen.

4) $x^a x^b = \exp(a \ln x) \exp(b \ln x)$

$= \exp(a \ln x + b \ln x)$

$= \exp((a+b) \ln x)$.

$= x^{a+b}$.

5) Übung.

§ 3.7 Konvergenz von Funktionfolgen.

Folge von reelle Zahlen

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$

$a \mapsto a_n$

Eine Funktionfolge ist eine Abbildung

$\mathbb{N} \to \{f : D \to \mathbb{R}\}.$

$n \mapsto f_n : D \to \mathbb{R}.$

Here Für jedes n

f_n ist eine Abbildung.

Defn. Die Funktionfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert (pointwise converge) Punktweise gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ falls für alle $x \in D$

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. f heisst die P.W. Grenzwert von f_n.

(Für jede $x \in D$ ist $(f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x), \dots)$ eine Folge reeller Zahlen.

$$\boxed{\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.}$$

Bsp.: Sei

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^n$$

$x = \frac{1}{2}$, $f_1(x) = \frac{1}{2}$

$f_2(x) = \frac{1}{2^2}$

$f_3(x) = \frac{1}{2^3}$

$\vdots$

$f_n(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^n$ geometrische Folge.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\tfrac{1}{2}) = 0$$

$x = \frac{1}{3}$, $\left(f_n(\frac{1}{3})\right)_{n\geq 1} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_{n\geq 1}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\tfrac{1}{3}) = 0$$

$\forall\, x \in [0,1] \setminus \{1\}$

$f_n(x) = x^n$

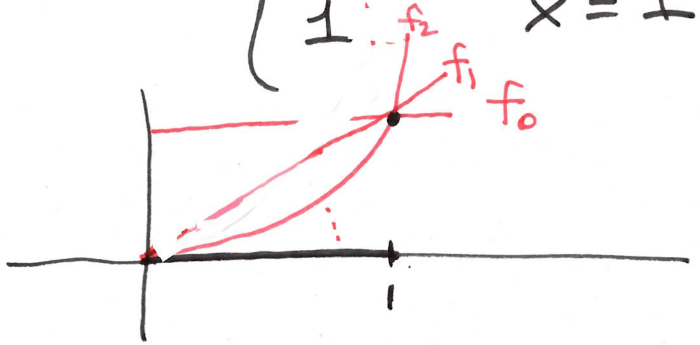
$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

Für $x = 1$, $f_n(1) = 1^n$

$(1, 1, \ldots)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$



Bmk. In diesem Bsp. sind alle Funktionen f_n in die Funktionfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ in $[0,1]$ stetig aber die Grenzwert Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

ist <u>nicht</u> stetig.

Nun, definieren wir einen stärkeren Konvergenz Begriff für Funktionfolgen.

Defn. Die Folge (f_n) $f_n : D \to \mathbb{R}$ <u>konvergiert gleichmässig</u> in D gegen $f : D \to \mathbb{R}$ falls gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \ \exists\, N \geq 1 \text{ so dass} \\ \forall n \geq N, \ \forall x \in D : \\ \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \end{array}}$$

(uniform convergence)

Der Sinn des Gleichmässigkonvergenz begriff ist

Satz Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge bestehend aus in D stetigen Funktionen, die in D gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f in D stetig.

Beweis Übung.

Bmk 1) In dieser Defn ist es wichtig, dass N nur von ε und nicht von $x \in D$ abhängt. Deswegen kommt die Bedingung "$\forall x \in D$" nach der "$\exists N \geq 1$."

2) $f_n \xrightarrow[\text{gleichmässig}]{} f$ falls

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Sei nun $f_n : D \to \mathbb{R}$

eine Folge von Funktionen.

Wir betrachten die

Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$

z.B. Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

mit $f_k(x) = c_k x^k$

<u>Defn</u>: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$

<u>konvergiert</u> <u>Gleichmässig</u> (in D)

falls die durch

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge

gleichmässig

konvergiert.

<u>Satz</u>: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$

$f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge

von stetigen Funktionen.

Wir nehmen an, dass

$$|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in D.$$

und dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert.

Dann konvergiert die Reihe

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ gleichmässig/a.

Wir möchten diesen Satz auf das Studium von Potenzreihen anwenden.

<u>Zur Erinnerung</u>: Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ konvergiert absolute für alle $|x| < \rho$ wobei

$$\rho = \begin{cases} \infty & \text{falls } \limsup |c_k|^{1/k} = 0 \\ \dfrac{1}{\limsup |c_k|^{1/k}} & \text{falls } \ldots > 0. \end{cases}$$

d.h $\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k$ konv. $\forall r < \rho$.

Sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $|x| < \rho$.

<u>Satz</u>: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit Positiven Konvergenzradius $\rho > 0$ und sei

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \ |x| < \rho$$

Dann gilt: $\forall \ 0 \leq r < \rho$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gleichmässig auf $[-r, r]$.

Insbesondere

ist $f :]-\rho, \rho[\to \mathbb{R}$

stetig.

§ 3.8. Trigonometrische Funktionen.

Wir definieren die

Sinusfunktion für $z \in \mathbb{C}$

$$\sin z := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Cosinusfunktion für $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

Aus Quotientenkriterium folgt dass die beide Reihen für alle $z \in \mathbb{C}$ abs. konvergiert.

$\sin z$: $a_n := (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{z^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{z^{2n+1}}\right|$$

$$= \left| z^2 \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$$

$\forall z \in \mathbb{C}$.

Satz $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to \sin x$

$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin x$

sind stetig.

Satz 1) $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$

$\forall z \in \mathbb{C}$.

2) $\cos z = \cos(-z)$ gerade Funk.
$\sin z = -\sin(-z)$ ungerade Funk.

3) $$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

4) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$.

5) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

Kor $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$
$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

$$\exp(iz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^{2n} z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$i^2 = -1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$+ i \sum \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \cos z + i \sin z .$$

2) 3) 4), 5) Übung.

§ 3.9. Die Kreiszahl π

$$\sin x := x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Aus der definition von $\sin x$ folgt $\sin 0 = 0$

Sei $x > 0$. Die Reihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

ist alternierend.

z. Erinnerung:

Satz (Leibniz) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mon. fallend Nullfolge ($\lim a_n = 0$)

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ und

$$a_1 - a_2 \leq \sum (-1)^n a_n \leq a_1$$

Frage: Für welche $x \geq 0$ ist $\left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)_{n\geq 0}$ mon. fallend?

$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ mon. fallend

$$\iff \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \forall n \geq 1$$

$$\iff x^2 \leq (2n)(2n+1) \quad \forall n \geq 1$$

Also $x^2 \leq 2 \cdot 3 = 6$.

Somit $x \leq \sqrt{6}$.

d.h. für $0 \leq x \leq \sqrt{6}$

$a_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ist mon. fallend.

und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Nach Satz von Leibniz

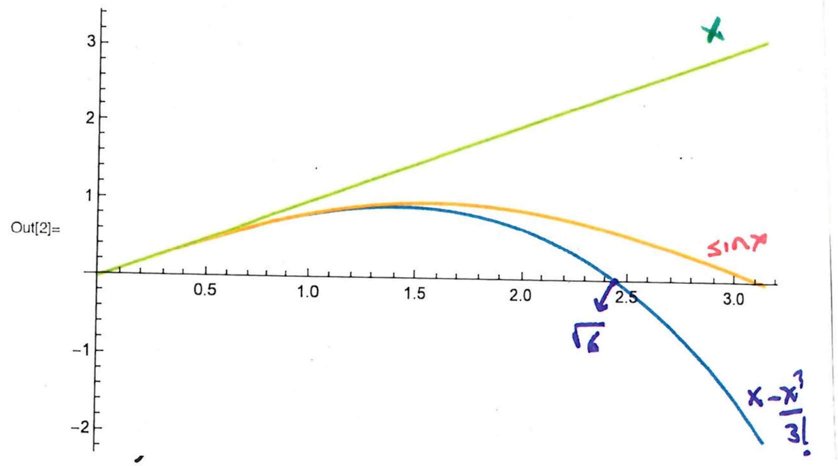
<u>Lemma</u> $a_1 - a_2 \le \sin x \le a_1$

$\forall \quad 0 \le x \le \sqrt{6}$.

$$\boxed{x - \frac{x^3}{3!} \le \sin x \le \cancel{x_1} \qquad \forall \ 0 \le x \le \sqrt{6}}$$

Nun können wir die Kreiszahl π definieren.

Sie ist definiert als die kleinste von Null verschiedene Nullstelle der Sinusfunktion.



<u>Satz</u> Die Sinusfunktion hat auf $]0,\infty[$ mindestens eine Nullstelle.

$$\pi := \inf\{t > 0 \mid \sin t = 0\}.$$

Dann gilt

(1) $\sin \pi = 0$, und

$\pi \in]2, 4[$

(2) $\forall x \in]0, \pi[$

$\sin x > 0$.

(3) $e^{i\pi/2} = i$

<u>Kor</u> 1) $e^{i\pi} = -1$

$e^{2\pi i} = 1$

2) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

3) $\sin(x + \pi) = -\sin x$

$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4) $\cos(x + \pi) = -\cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$

5) Nullstellen von $\sin x$

$= \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$\sin x > 0 \quad \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[$

$\sin x < 0 \quad \forall x \in](2k+1)\pi,$

$(2k+2)\pi[$

6) Nullstellen von $\cos x$

$= \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$.

Clicker ~~Frage~~.

$\frac{f(x)}{x}$ in $x_0 = 2$

stetig

$g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ~~stetig~~ stetig in $x_0 = 2$

$\Rightarrow x \cdot g(x)$ ist in $x_0 = 2$

stetig.

$\Rightarrow f(x)$ ist in $x_0 = 2$

stetig.

f stetig in $x_0 = 2$

~~hier~~ $\Leftrightarrow$

$\underline{\forall}\ \underline{(a_n)_{n\geq 1}}$ mit $\lim a_n = x_0 = 2$

$f(\lim a_n) = \lim f(a_n)$

Für $a_n = 2 - \frac{1}{n}$

$\lim a_n = 2$.

f stetig $\Rightarrow \lim f(2 - \frac{1}{n})$

$= f(2)$

$\not\Leftarrow$