13.4.2022

Konvergenz von Funktionenfolgen

Defn Die Funktionfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ falls für alle $x \in D$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(f heisst ~~der~~ Punktweise Grenzwert von f_n.)

d.h. $f_n \xrightarrow[\text{punktweise}]{} f$ falls gilt

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \\ \text{so dass } \forall n \geq N: \\ \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \end{array}}$$

Punktweise konvergenz

Bsp. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$

konvergiert punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \to x^n$ ist stetig $\forall n$

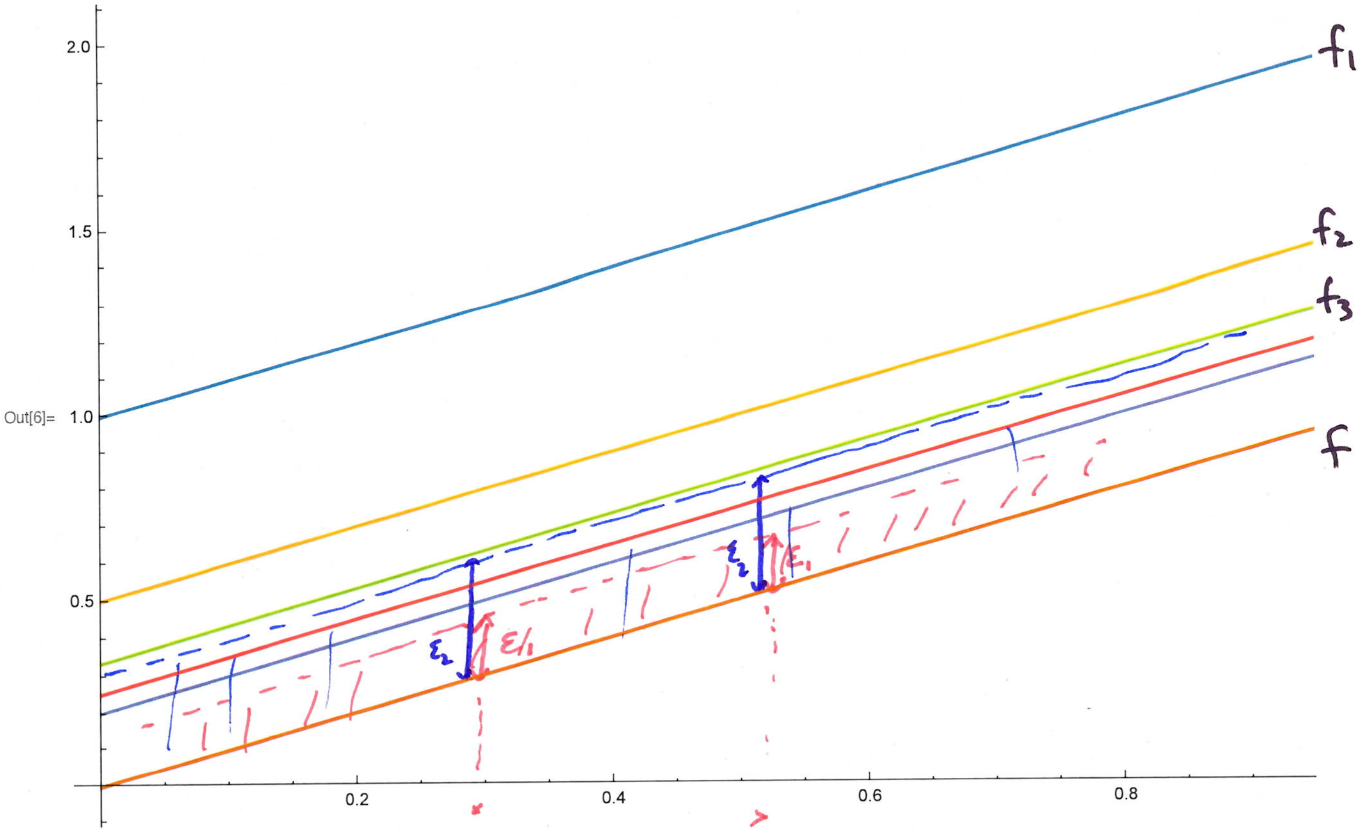
aber ~~der~~ Grenzwert Funktion $f(x)$ ist nicht stetig.

Defn Die Funktionfolge $(f_n)_{n\geq 1}$, $(f_n : D \to \mathbb{R})$ konvergiert gleichmässig in D gegen $f : D \to \mathbb{R}$ falls gilt

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1 \text{ so dass} \\ \forall n \geq N, \forall x \in D: \\ \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \end{array}}$$

Gleichmässig konvergenz

In[6]:= Plot[{x + 1, x + 1 / 2, x + 1 / 3, x + 1 / 4, x + 1 / 5, x}, {x, 0, 1}]



$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + \frac{1}{n}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x$$

$f_n \to f$ punktweise und gleichmässig

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann es gibt N

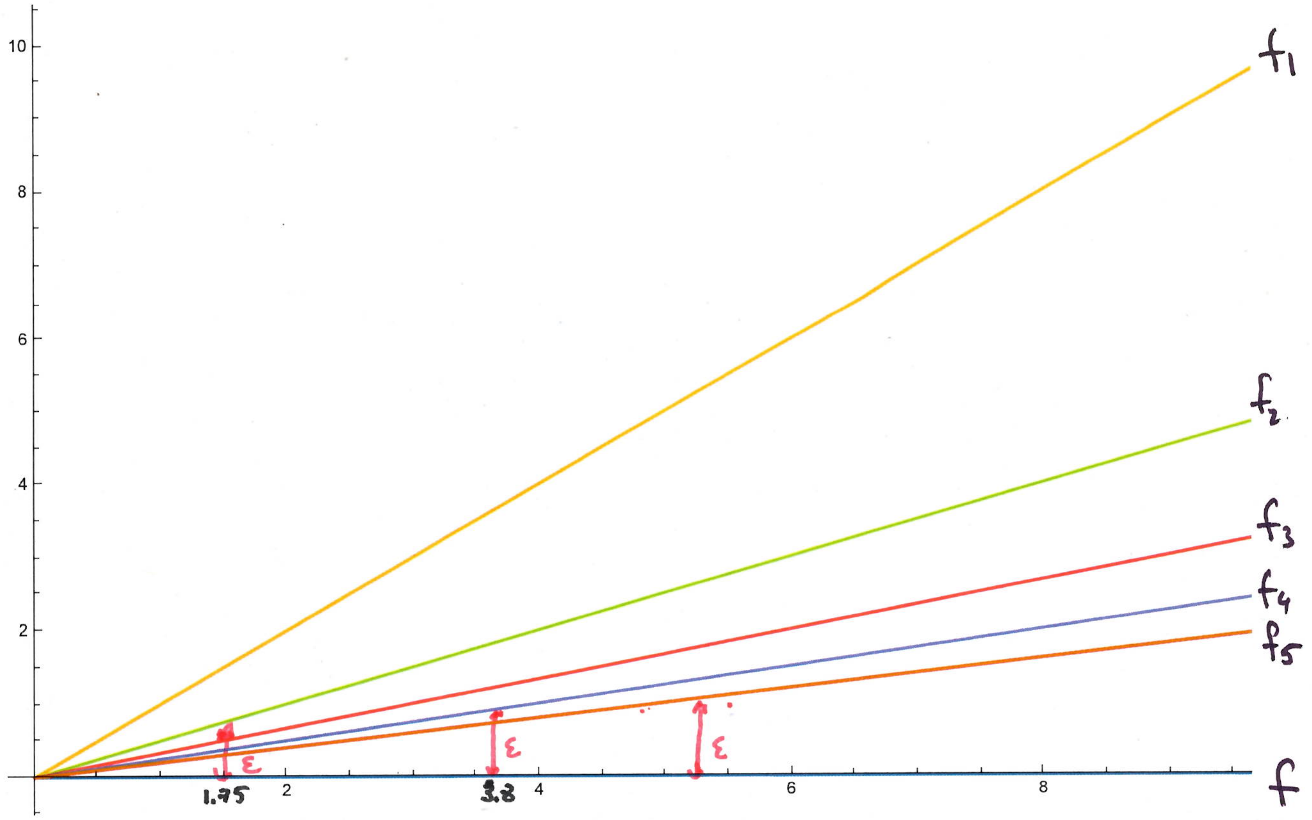
so dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}$

N hängt von ε ab, aber nicht von x ab.

11-7

In[5]:= `Plot[{0, x, x / 2, x / 3, x / 4, x / 5}, {x, 0, 10}]`

Out[5]=



$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x/n \qquad\qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 0$$

$f_n \to f$ punktweise

Für gegebenen $\varepsilon > 0$, N hängt ~~nicht~~ nicht nur von ε sondern auch von x ab!

Für $x = 1.75$, $N > 2$

Für $x = 3.8$ $N > 4$.

11-2

Satz. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktionfolge bestehend aus in D stetigen Funktionen. Falls f_n konvergiert gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, dann ist f in D stetig.

d.h. Gleichmässig Konvergenz bewahrt die Stetigkeit!

Satz (Cauchy Kriterium) Die Funktionfolge $f_n : D \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmässig in D,

$\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \geq 1$ so dass

$\forall n, m \geq N$ und $\forall x \in D$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Defn Sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen. Die Reihe

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig (in D), falls die durch

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$ definierte

Funktionfolge gleichmässig konvergiert.

Satz Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Wir nehmen an, dass $|f_n(x)| \leq c_n$ $\forall x \in D$ und dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert.

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmässig in D und deren Grenzwert $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ist eine in D stetige Funktion.

Satz Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius $\rho > 0$ und sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $|x| < \rho$

Dann gilt: $\forall\ 0 \leq r < \rho$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gleichmässig auf $[-r, r]$.

Insbesondere ist $f:]-\rho, \rho[\to \mathbb{R}$ stetig.

Trigonometrische Funktionen

$$\boxed{\begin{aligned} \sin z &:= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos z &:= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}}$$

Satz: $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetige Funktionen

Satz

① $e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

② $\cos z = \cos(-z)$, $\sin z = -\sin(-z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

③ $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$

④ $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

⑤ $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

⑥ $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$

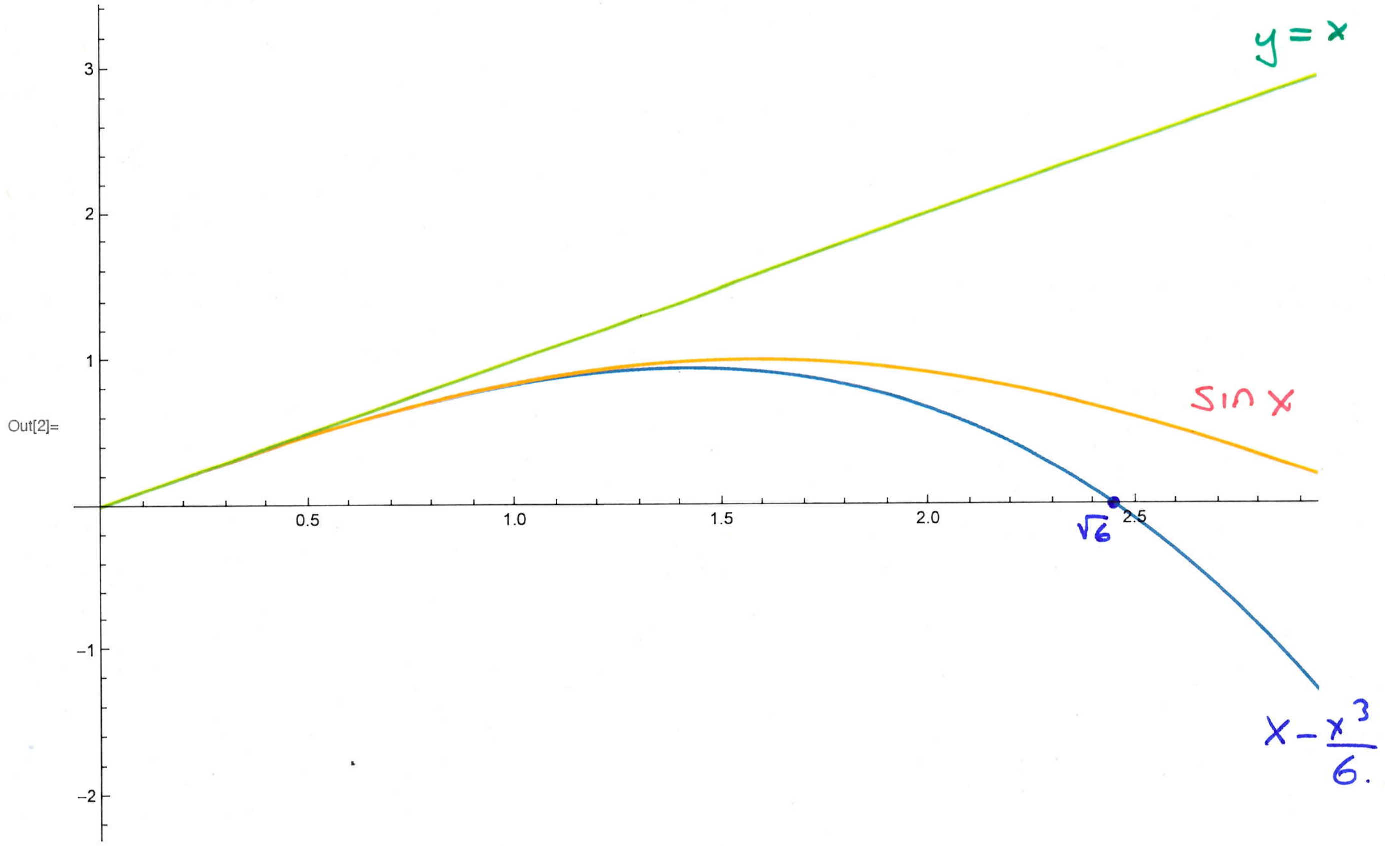
$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

Lemma $\forall\ 0 \leq x \leq \sqrt{6}$

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

In[2]:= `Plot[{x - x^3 / 6, Sin[x], x}, {x, 0, Pi}]`

Out[2]=



Satz Die Sinusfunktion hat auf $]0,\infty[$ mindestens eine Nullstelle.

$$\boxed{\pi := \operatorname{Inf}\{t>0 \mid \sin t = 0\}}.$$

Dann gilt ① $\sin \pi = 0$ und $\pi \in]2,4[$

② $\forall x \in]0,\pi[$, $\sin x > 0$

③ $e^{i\pi/2} = i$

Kor ① $e^{i\pi} = -1$, $e^{2\pi i} = 1$

② $\sin(x+\pi/2) = \cos x$
$\cos(x+\pi/2) = -\sin x$

③ $\sin(x+\pi) = -\sin x$
$\sin(x+2\pi) = \sin x$

④ $\cos(x+\pi) = -\cos x$
$\cos(x+2\pi) = \cos x$

⑤ Nullstellen von $\sin x = \{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

Nullstellen von $\cos x = \{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

$\sin x > 0 \quad \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[\quad ; k\in\mathbb{Z}$

$\sin x < 0 \quad \forall x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$

$\cos x > 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, -\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi[$

$\cos x < 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2}+(2k+2)\pi[$

$k\in\mathbb{Z}$

Beweis (Satz)

① The idee der Beweis:

Man zeigt ⓐ $\sin x > 0 \quad \forall x \in]0,2]$

Insbesondere $\sin 2 > 0$

ⓑ $\sin 4 < 0$ (Übung)

Dann nach Zwischenwert Satz

Da $\sin x$ stetig ist, gibt es mindestens ein $x \in]2,4[$ so dass $\sin x = 0$.

d.h. $\{t>0 \mid \sin t=0\} \neq \emptyset$

und damit

$$\inf \{t>0 \mid \sin t=0\}$$

existiert. Nennen wir dieses Infimum π = Die Kreiszahl.

Aus Stetigkeit von $\sin x$ folgt dass $\sin \pi = 0$.

(2) Um zu zeigen dass $\sin x$ auf $]0,\pi[$ positiv ist:

auf $]0,\pi[$ hat $\sin x$ keine Nullstelle, da $\pi = \inf\{t>0 \mid \sin t=0\}$.

$0<1<2<\pi$

$$\sin 1 \underset{\text{Lemma}}{>} 1-\frac{1}{6} > 0.$$

Falls $y \in]0,\pi[$ gibt mit $\sin y<0$, dann würde aus $\sin 1>0$ und dem ZWS, folgt $z\in]1,y[$ mit $\sin z=0$

Insbesondere $0<z<\pi$

ein Widerspruch zur minimalität von π.

③ Winkeldoppelungsformel

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z$$

mit $z = \frac{\pi}{2}$

$$\underbrace{\sin \pi}_{= 0} = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2}.$$

Da $\frac{\pi}{2} \in]0, \pi[$,

$$\sin \frac{\pi}{2} > 0$$

Insbesondere folgt dass

$$\boxed{\cos \frac{\pi}{2} = 0}.$$

Aus $\cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$

und $\sin \frac{\pi}{2} > 0$ folgt dass

$$\boxed{\sin \frac{\pi}{2} = 1}.$$

$$e^{i\pi/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

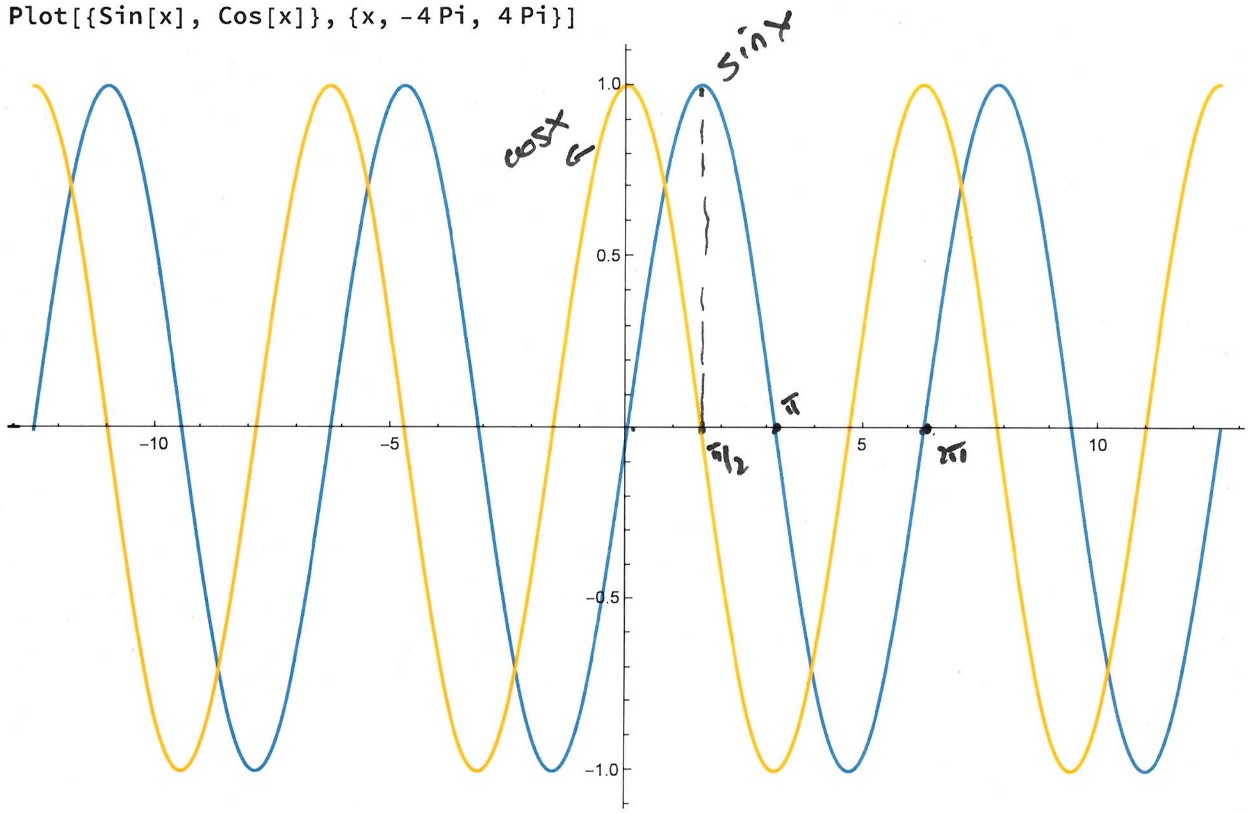
Für $z \notin \frac{\pi}{2} + \pi k$, definieren wir die Tangensfunktion

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$$

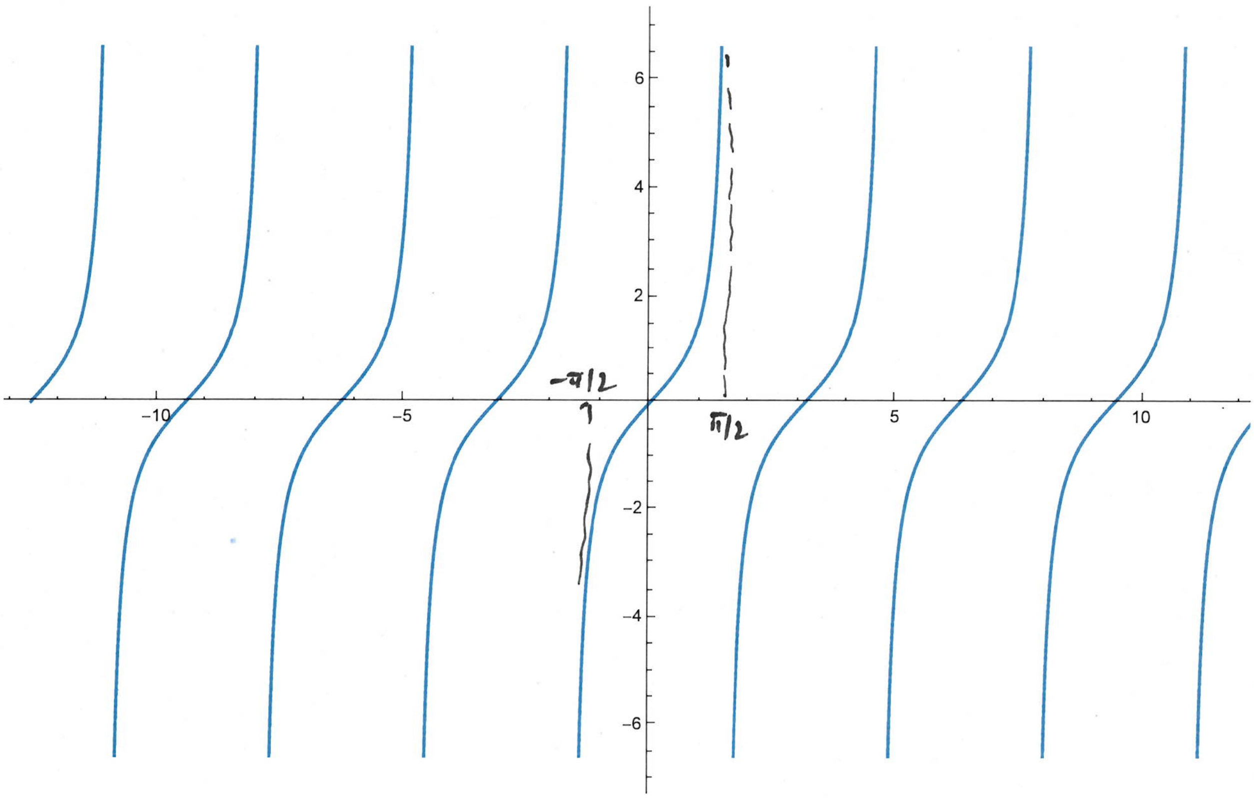
Für $z \neq \pi k$, Cotangensfunkt.

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}$$

```
In[ ]:= Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, -4 Pi, 4 Pi}]
```

Out[ ]=


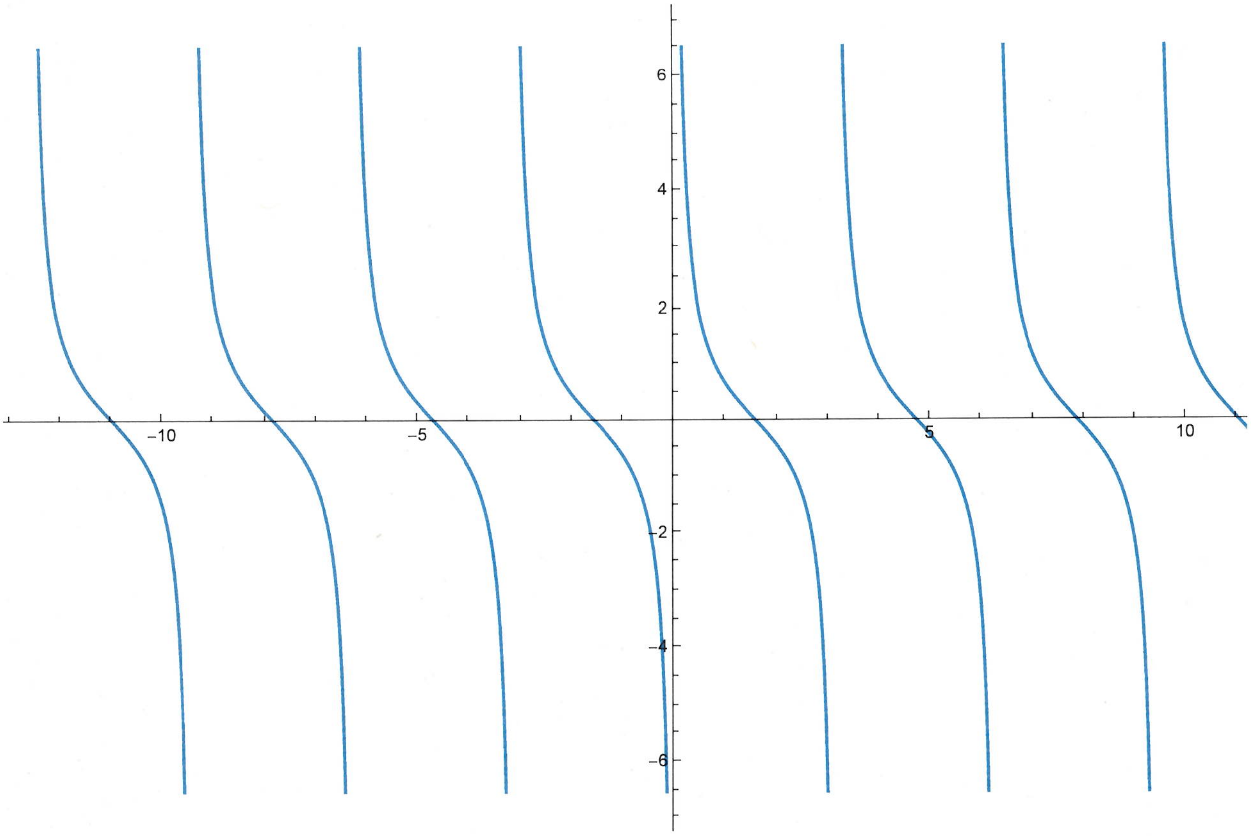

```
In[ ]:= Plot[Tan[x], {x, -4 Pi, 4 Pi}]
```

Out[ ]=


6-1

In[ ]:=
```
Plot[Cot[x], {x, -4 Pi, 4 Pi}]
```

Out[ ]=



6-2

§ 3.10 Grenzwert von Funktionen.

f ist in x_0 stetig.

Falls $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ so dass

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

In definition von stetigkeit, brauchen wir dass f im punkt x_0 definiert ist!

$f : D \to \mathbb{R}$

Wir wollen Grenzwerte von einen Funktion definieren wenn $x \in D$ gegen ein $x_0 \in \mathbb{R}$ strebt.

Bmk:

wir ~~müssen~~ erlauben dass $x_0 \notin D$.

Defn $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein

Häufungspunkt der Menge D,

falls $\forall \delta > 0$, (Accumulation point).

$$\left(\left] x_0 - \delta, x_0 + \delta \right[\setminus \{x_0\} \right) \cap D \neq \emptyset$$

Jedes Interval von x_0 hat

mindestens einen Punkt in D,

der nicht x_0 ist.

Wir bezeichnen die Menge

aller Häufungspunkte von D

mit $D' := \{$ alle Häufungspunkte von $D \}$

Bsp. $D =]1, 2[\; \cup \;]4, 5[\; \cup \{6\}$

$D' = [1, 2] \cup [4, 5]$

$6 \notin D'$, $\delta = \frac{1}{2}$

$$\left( ]5.5, 6.5[\setminus \{6\} \right) \cap D = \emptyset.$$

Defn. Sei $f: D \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt

Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der

Grenzwert von $f(x)$

für x gegen x_0 $(x \to x_0)$

bezeichnet mit

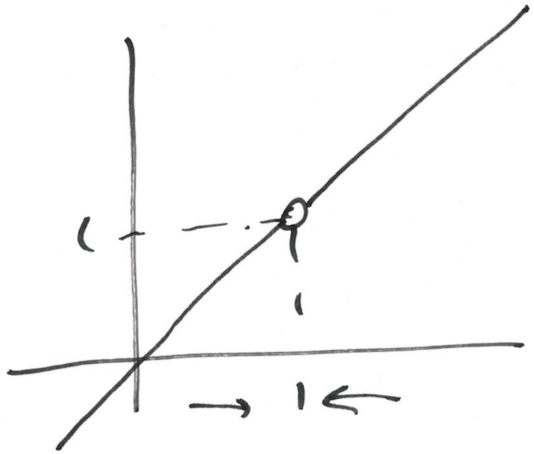
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = A.}$$

Falls $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ so dass

$\forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\})$

$|f(x) - A| < \varepsilon$.

Bsp.



$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$.

$x \to x$.

$\lim_{x \to 1} f = 1 \neq f(1)$

Grenzwert existiert.

aber f ist nicht

stetig in $x_0 = 1$.

Bmk. ① Der Grenzübergang $x \to x_0$ bedeutet ~~dass~~
x kommt der Stelle x_0 beliebig nähe ohne sie jedoch jemals zu erreichen.

Die Funktion $y = f(x)$ muss nicht an der Stelle x_0 definiert sein!

② Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

$$\Leftrightarrow \forall (a_n)_{n \geq 1} \in D \setminus \{x_0\} \text{ mit } \lim a_n = x_0 : \lim_{n \to \infty} f(a_n) = A$$

③ Falls $x_0 \in D$

Dann ist f in x_0 stetig $\Leftrightarrow$

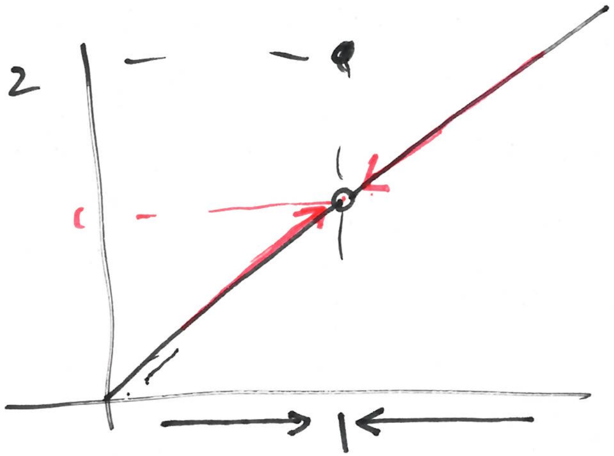
$\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert

und ist gleich $f(x_0)$

f in x_0 stetig $\Leftrightarrow$ ① f in x_0 ist definiert

② $\lim_{x \to x_0} f$ existiert

③ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.



$$f(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \neq 1 \\ 2 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

1) f ist in $x_0 = 1$ definiert.

2) $\lim\limits_{x \to 1} f$ existiert, und gleich 1

3) $\lim\limits_{x \to 1} f = 1 \neq f(1) \Rightarrow f$ nicht stetig.

Lemma

① Falls $f : D \to \mathbb{R}$ zwei
$g : D \to \mathbb{R}$ funktionen

$x_0 \in D'$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = B$$

Dann $\lim\limits_{x \to x_0} (f \pm g) = A \pm B$

$$\lim_{x \to x_0} (fg) = A\,B.$$

② Falls $f \leq g$ so folgt
$A \leq B$.

/11

③ Sandwichsatz

Falls $g_1 \leq f \leq g_2$

mit

$$\lim_{x \to x_0} g_1(x) = \lim_{x \to x_0} g_2 = L$$

dann existiert

$$\lim_{x \to x_0} f = L.$$

<u>Bsp.</u> $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Dann

gilt $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

<u>Beweis</u>: Wir haben schon gesehen dass

$$0 \leq x \leq \sqrt{6}$$

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x.$$

$\forall\ x \in]0, \sqrt{6}[$

$$1 - \frac{x^2}{3!} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Da x^2 und $\frac{\sin x}{x}$ gerade Funktionen sind,

$$1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$\forall\ x \in]-\sqrt{6}, \sqrt{6}[\setminus \{0\}.$

Da 1, $1-\frac{x^2}{6}$

stetige funk. sind

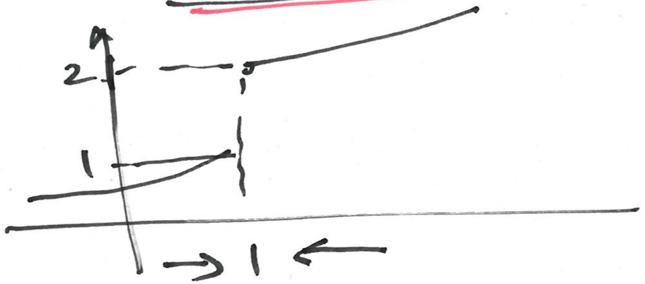
$$\lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} 1-\frac{x^2}{6} = 1$$

Nach Sandwich satz

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Linkseitige und Rechtseitige Grenzwerte.



Defn. Sei $f: D \to \mathbb{R}$

x_0 ist ein Häufungspunkt von $D\cap]x_0,\infty[$

Falls der Grenzwert der eingeschränkten Funktion

$$f|_{D\cap [x_0,\infty[} \quad \text{für } x\to x_0$$

existiert, wird er mit

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ bezeichnet}$$

und nennt sich rechtseitigen Grenzwert.

Falls der Grenzwert der Funktion

$$f\Big|_{D\cap\,]-\infty,\, x_0]}$$

für $x \to x_0$ existiert

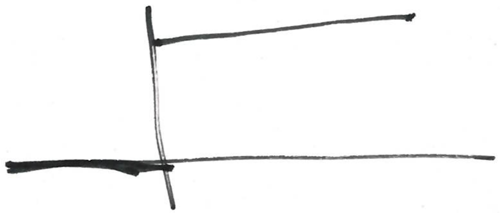
wird er mit

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ bezeichnet.

und nennt sich

<u>linkseitiger Grenzwert</u>.

<u>Bsp.</u> $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$



$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

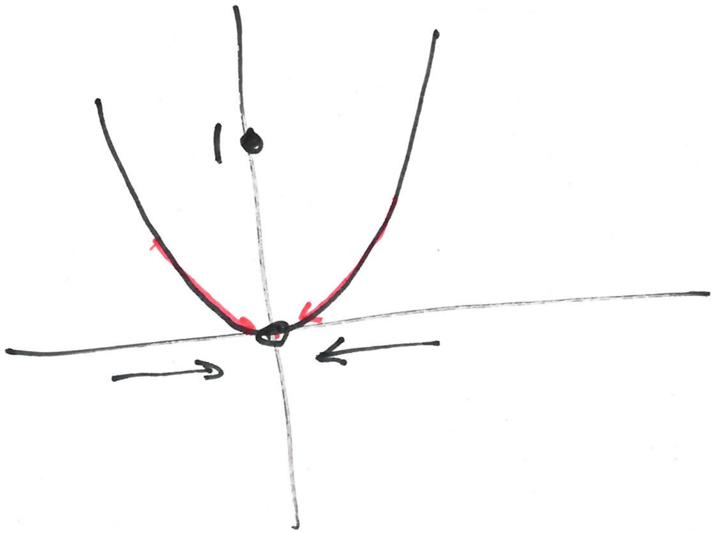
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

Aber $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht.

<u>Bmk.</u> Besitzt eine Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 den Grenzwert L so gilt

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Bsp. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f = 0$$

aber f ist in 0 nicht stetig.

- Wir erweitern diese Definition des Grenzwert auf

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty}$$

falls gilt:

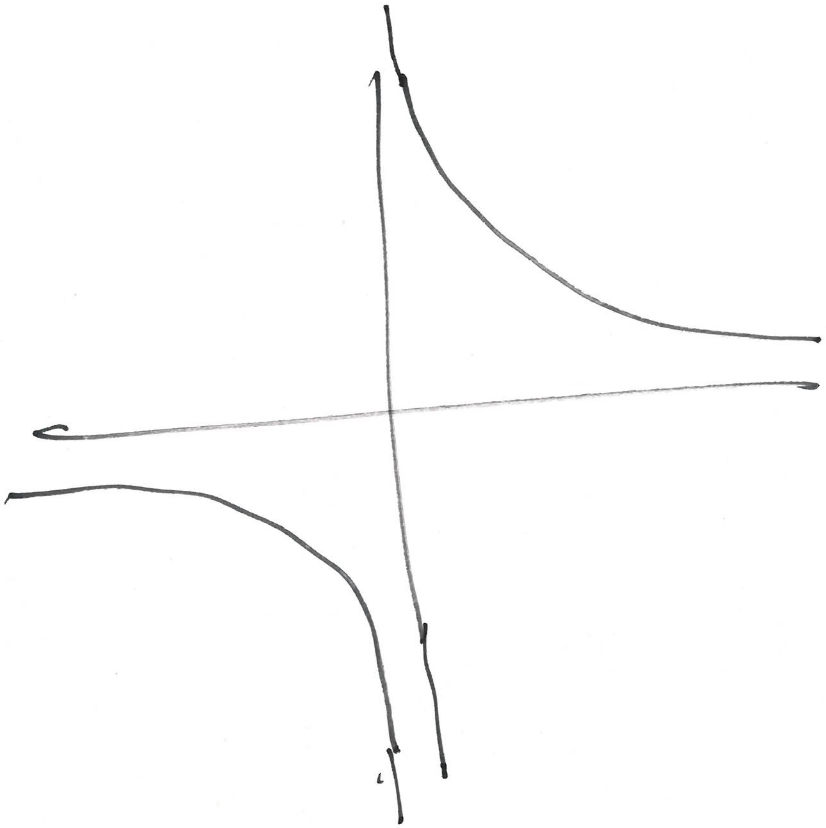
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap \left]x_0, x_0+\delta\right[: f(x) > 1/\varepsilon.}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall N > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap \left]x_0, x_0+\delta\right[\ f(x) > N.}$$

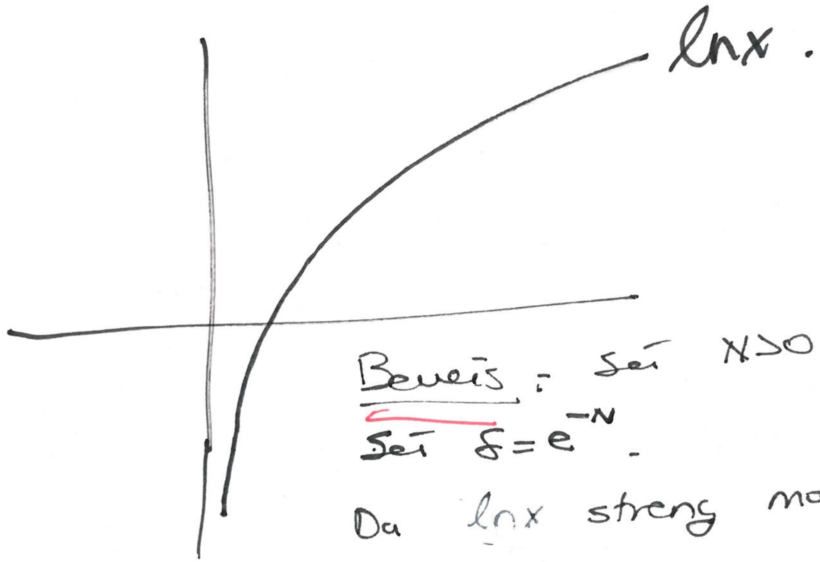
Bsp. Mit dieser defn

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$



$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Bsp. $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$



Beweis: Sei $N > 0$ gegeben.

Sei $\delta = e^{-N}$.

Da $\ln x$ streng monotone ist,

falls $x < \delta = e^{-N}$

dann gilt $\ln x < \ln e^{-N} = -N$

Somit $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Clicker Frage

<u>Übung</u>: Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von beschränkte Funktionen. Falls $f_n \longrightarrow f$ gleichmässig, Dann ist f auch beschränkt.

$$f_n(x) = \frac{n}{nx+1} \longrightarrow f = \frac{1}{x} \text{ punktweise.}$$

f_n sind beschränkt aber f ist nicht beschränkt.

Deswegen f_n gegen f konvergiert p.w aber nicht gleichmässig.