27.4.2022

Defn Grenzwert einer Funktion.

Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt $[\forall \delta > 0, (]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset]$.

Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0 ($x \to x_0$)

Falls $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ so dass $\forall x \in D \cap (]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\})$:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Wir bezeichnen der Grenzwert mit

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = A}$$

- $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \forall (a_n)_{n \geq 1} \in D \setminus \{x_0\} \text{ mit } \lim a_n = x_0: \lim_{n \to \infty} f(a_n) = A.$$

- Falls $x_0 \in D$, dann ist f in x_0 stetig

$$\iff \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existiert und } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Lemma ① $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} g = B$

Dann
- $\lim_{x \to x_0} (f \pm g) = A \pm B$
- $\lim_{x \to x_0} (fg) = AB$

② Falls $f \leq g$ so folgt $A \leq B$

③ Falls $g_1 \leq f \leq g_2$ mit $\lim_{x \to x_0} g_1 = \lim_{x \to x_0} g_2 = L$ dann existiert $\lim_{x \to x_0} f$ und ist gleich L.

Bsp $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

Defn (Linkseitige, Rechseitige Grenzwert)

$f: D \to \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von $D \cap]x_0, \infty[$.

Falls $f|_{D \cap]x_0, \infty[}$ für $x \to x_0$ ein Grenzwert besitzt, wird der Grenzwert mit $\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x)}$ bezeichnet und nennt sich rechseitiger Grenzwert.

($f|_{D \cap]-\infty, x_0[}$ besitzt ein Grenzwert für $x \to x_0$ dann wird er mit $\boxed{\lim_{x\to x_0^-} f(x)}$ bezeichnet und nennt sich linkseitiger Grenzwert)

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to x_0} f(x) \text{ existiert} \\ \lim_{x\to x_0} f(x) = L \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to x_0^-} f(x) \\ = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \\ = L \end{array}\right\}}$$

Erweiterung ~~der~~ Definition der Grenzwert

$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty}$ falls gilt

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap]x_0, x_0+\delta[\quad f(x) > 1/\varepsilon}$$

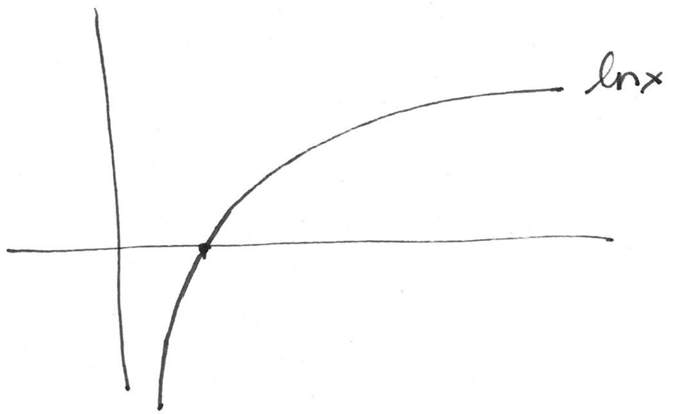
$$\iff \boxed{\forall N > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap]x_0, x_0+\delta[\quad f(x) > N}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$ falls gilt

$\forall N > 0, \; \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap \,]x_0, x_0+\delta[$

$f(x) < -N$.

Bsp $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.



Sei $N > 0$ gegeben.

Sei $\delta = e^{-N}$.

Da $\ln x$ streng monotone wachsend ist, falls

$x < \delta = e^{-N}$, dann gilt

$\ln x < \ln e^{-N} = -N$.

Bsp: Sei $a > 0$

$$\lim_{x \to 0} x^a = 0.$$

Beweis: $x^a := \exp(a \ln x)$.

Aus $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

folgt dass
es für jedes $N \in \mathbb{N}$
ein $\delta > 0$ gibt so
dass

$$0 < x < \delta \Rightarrow \ln x < -N$$

und da $a > 0$

$$a \ln x < -aN$$

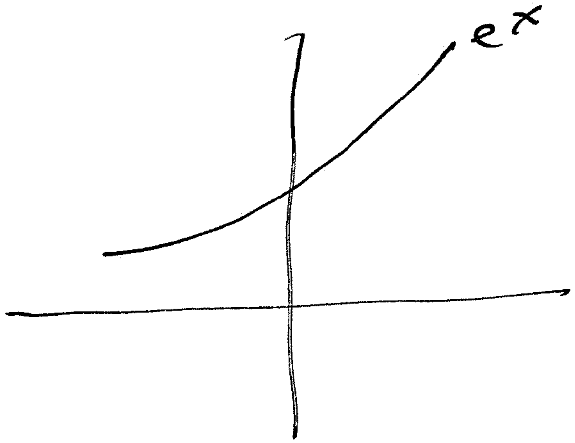
Da exp streng mon. wachsend ist,

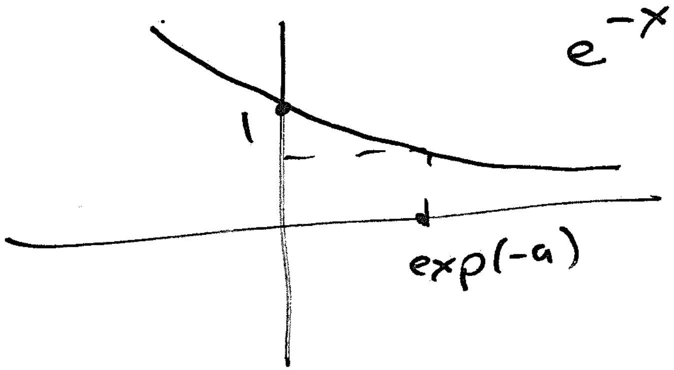
$$x^a = \exp(a \ln x) < \exp(-aN) = (\exp(-a))^N.$$

Mit $N \in \mathbb{N}$ beliebig gross wird

$$\exp(-aN) = (\exp(-a))^N$$

beliebig klein.





$\exp(-a) < 1$
Woraus folgt dass $\exp(-aN) \to 0$.

In vielen Fällen untersuchen wir das Verhalten einer Funktion f, wenn $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$ strebt.

Wir definieren den <u>Grenzwert im Unendlichen</u>

Sei $f: D \to \mathbb{R}$. Ist D nach oben unbeschränkt so hat $f(x)$ für $x \to \infty$ den Grenzwert $L \in \mathbb{R}$ falls gilt:

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists C > 0 :$

$\forall x \in D$

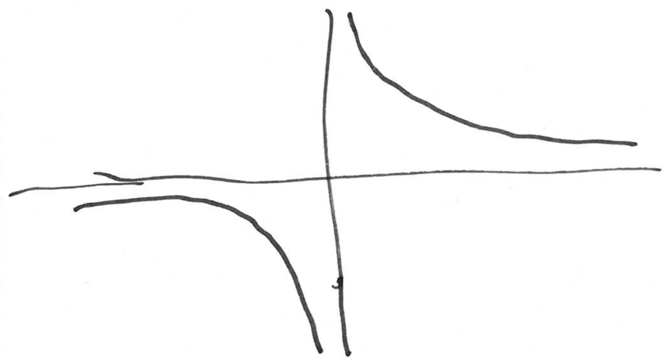
$$x > C \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

<u>Bsp.</u> $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

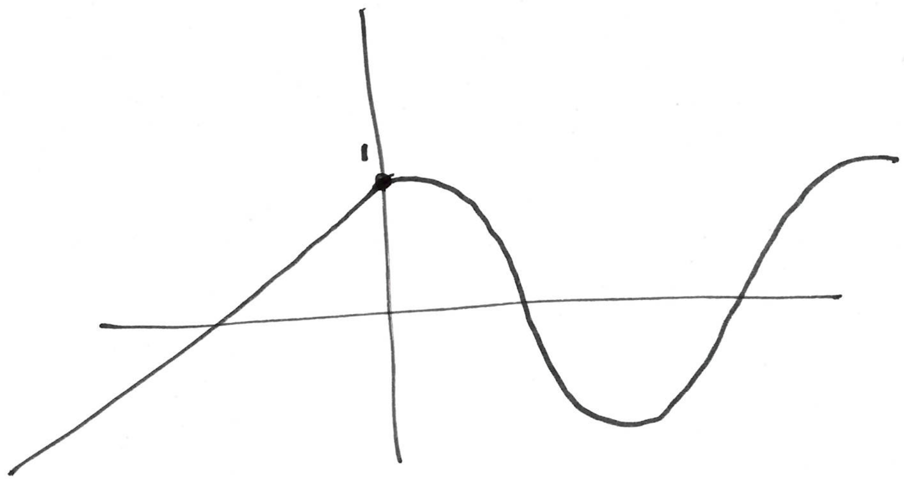
$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$



$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$

Bmk: Die Stetigkeit einer abschnittweise definierte Funktion hängt nicht nur von Ihren Abschnittfunktionen, sondern auch vom Verhalten an der Grenzen vom Abschitt intervalle ab



Bsp: $f(x) := \begin{cases} \cos x & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0. \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x+1 = 1.$$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ existiert und gleich $1 = f(0)$.

Bsp.

$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ f ist in $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ stetig

$f: \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}$.

f hat eine "Definitions Lücke" bei $x=2$

① f ist in $x=2$ nicht stetig, da $f(2)$ nicht definiert ist.

② Aber f ist "stetig ergänzbar" in $x=2$.

Warum?

$\frac{x^2-4}{(x-2)} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$

Falls $x \neq 2$, dann $x-2 \neq 0$

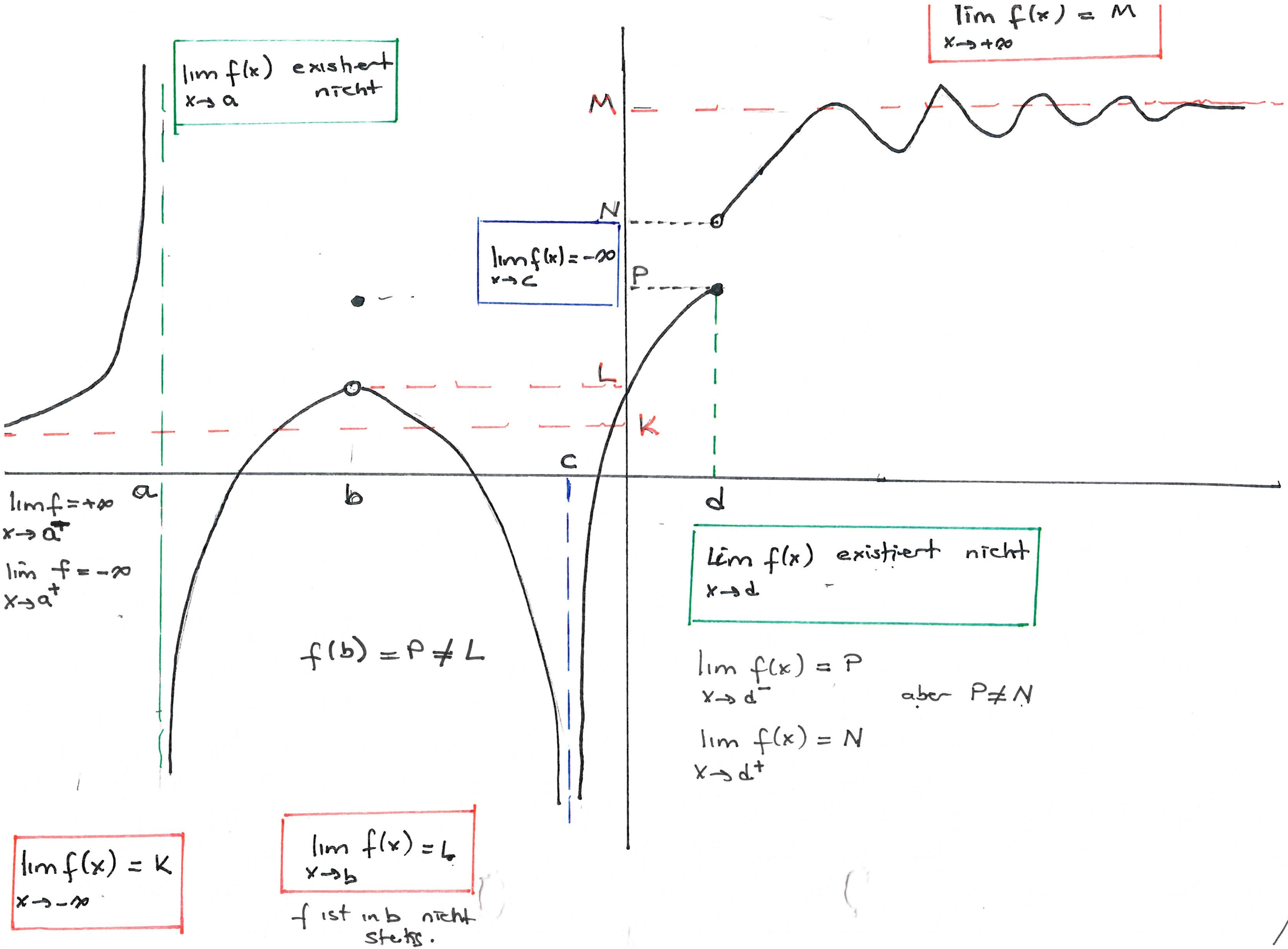
Falls $x \neq 2$, dann $\frac{x^2-4}{x-2} = x+2$

Dass heisst, $f(x)$, ~~an~~ $x=2$ ist nicht definiert, aber $\lim_{x\to 2} f(x)$ existiert und $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{falls } x \neq 2 \\ 4 & \text{falls } x = 2. \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{f}(x)$ auch in

$x=2$ stetig.


$\lim_{x \to +\infty} f(x) = M$
$\lim_{x \to a} f(x)$ existiert nicht
M
N
$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$
P
L
K
c
a
b
d
$\lim_{x \to a^-} f = +\infty$
$\lim_{x \to a^+} f = -\infty$
$\lim_{x \to d} f(x)$ existiert nicht
$f(b) = P \neq L$
$\lim_{x \to d^-} f(x) = P$ aber $P \neq N$
$\lim_{x \to d^+} f(x) = N$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = K$
$\lim_{x \to b} f(x) = L$
f ist in b nicht stetig.

§4. Differenzierbare Funktionen

Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$.

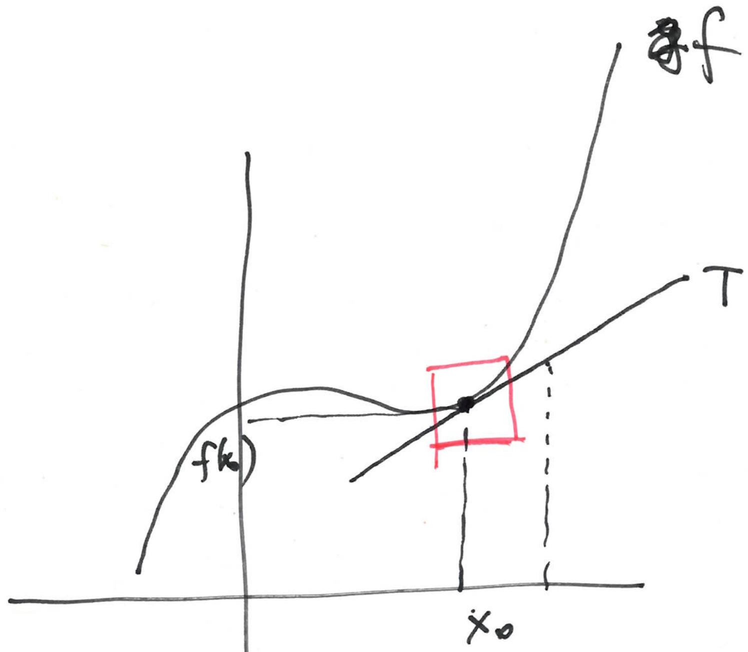
Thema: Die Berechnung lokaler Veränderungen von Funktionen

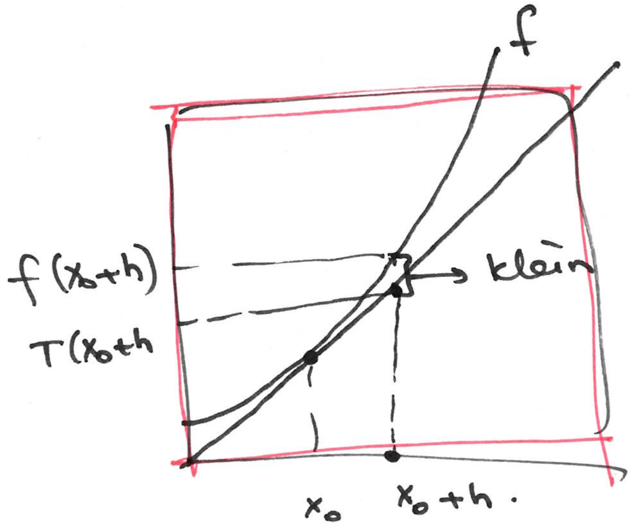
Geometrisch: Die Tangentensteigung.

Der Begriff der Ableitung.

Seien $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben.

Wir möchten f in der Nähe von x_0 durch eine Gerade approximieren.





$T(x) = y = mx + b$.

$T(x_0) = f(x_0)$

$f(x_0) = m x_0 + b$.

Falls wir m wissen, wissen wir auch b.

Die Tangente an den Graphen von f durch Punkt $(x_0, f(x_0))$ stellt eine gute Approximation dar.

<u>Frage</u>: Was ist die Gleichung der Tangente?

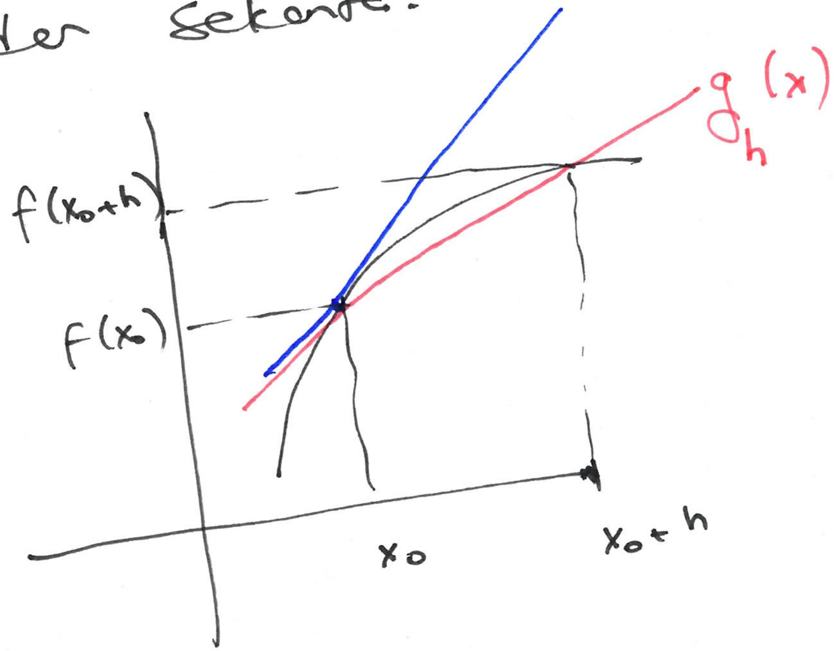
Was ist die Steigung der Tangente?, $m = ?$.

Diese erhalten wir geometrisch aus der Sekante von f durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$

und $\left(x_0+h,\ f(x_0+h)\right)$

in dem wir den Grenzübergang $h \to 0$ vornehmen:

Analytisch die Gleichung der Sekante:



$$g_h(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0).$$

wir betrachten den Differenzquotienten.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

$\downarrow$ = die Steigung der Sekante $g_h(x)$

Veränderungsrate von f zwischen x_0 und x_0+h.

wir wollen die Steigung der ~~Sekante~~ Tangente als die Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

erhalten.

<u>Defn</u> Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, f heisst in x_0 <u>differenzierbar</u> falls der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

existiert. In diesem Fall wird dieser Grenzwert mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet und er heisst die Ableitung (das Differenzial) von f an der Stelle x_0.

Defn $f : D \to \mathbb{R}$

heisst auf D differenzierbar

(oder in D differenzierbar)

falls f für jeden Punkt

$x_0 \in D$ differenzierbar ist.

In diesem Fall, definiert

die Kollektion aller

$$x_0 \mapsto f'(x_0) \quad \text{eine neue}$$

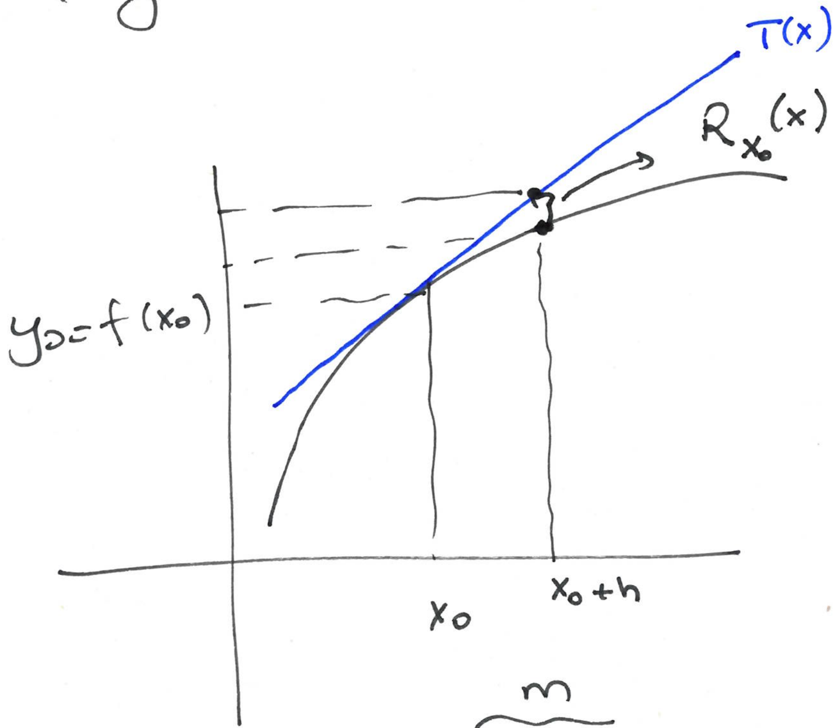
Funktion.

Die Funktion $\boxed{\begin{aligned} f' &: D \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x_0) \end{aligned}}$

heisst die Ableitungfunktion von f

(≡: Derivative of f).

Bmk: Der Graph einer differenzierbare Funktion lässt sich linear durch eine Tangente annähern.



$$T(x) = f(x_0) + \overbrace{f'(x_0)}^{m}(x - x_0).$$

Erinnerung:

Gerade durch (x_0, y_0) mit Steigung m:

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

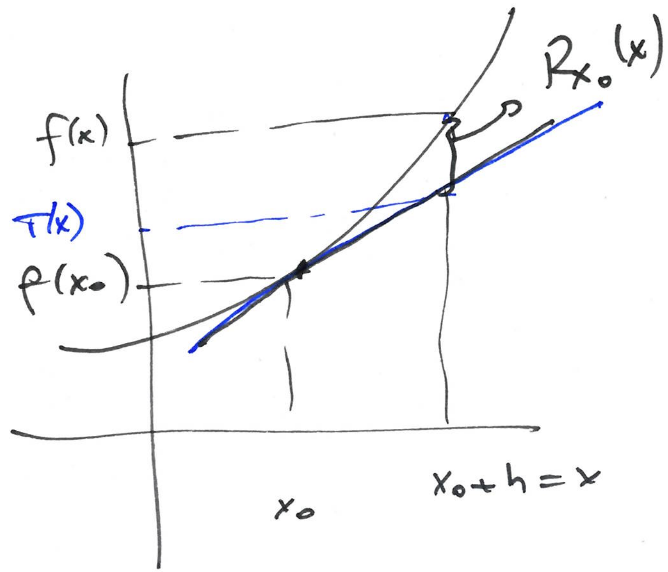
$$\downarrow$$

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

$T(x)$ ist eine Linerisenung und ist eine gute Näherung für $f(x)$ in einer Umgebung von x_0.

Wieso? Falls x in eine Umgebung von x_0 ist, sei

$$f(x) = T(x) + R_{x_0}(x).$$



$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T(x)} + R_{x_0}(x)$$

$$f(x)-f(x_0)$$
$$= f'(x_0)(x-x_0) + R_{x_0}(x)$$

Falls $x-x_0 \neq 0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + \frac{R(x)}{x-x_0}$$

Somit

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$= \lim_{x\to x_0} f'(x_0) + \lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x-x_0}$$
$$\Rightarrow f'(x_0) = f'(x_0) + \lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x-x_0}.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} = 0$$

d.h. wenn $x \to x_0$ strebt, strebt die Restglied $R_{x_0}(x)$ schneller nach Null als $x-x_0$!.

$$\text{Sei } r(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0. \end{cases}$$

Bmk. $\lim_{x \to x_0} r(x) = \lim \frac{R_{x_0}(x)}{x - x_0} = 0$

$= r(x_0)$

d.h $r(x)$ ist in $x = x_0$ stetig.

und gilt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0).$$

d.h. falls f in x_0 differenzierbar ist, dann es gibt $m \in \mathbb{R}$ $(m = f'(x_0))$ und $r : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 mit

1) $f(x) = f(x_0) + \cancel{f'(x_0)}(x - x_0)m + r(x)(x - x_0)$

2) $r(x_0) = 0$.

Satz (Weierstrass) sei $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

Folgende Aussagen sind äquivalent

① f ist in x_0 differenzierbar.

$\Downarrow$.

② $\exists\, m \in \mathbb{R}$, $r : D \to \mathbb{R}$ mit

2.1) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$

2.2) $r(x_0) = 0$ und r ist stetig in x_0.

Bsp. 1) Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto c \qquad \text{konstante Funktion.}$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x) - f(x_0) = c - c = 0$$

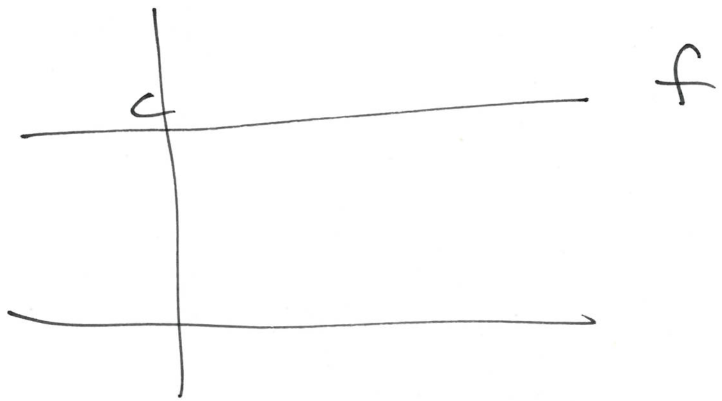
somit $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

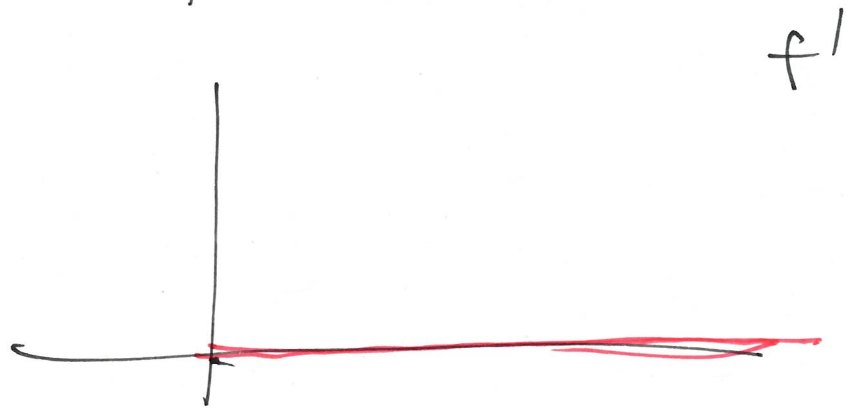
$$\forall x \neq x_0 .$$

Somit existiert
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_0 \neq x}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 = f'(x_0)$$

d.h. Die Ableitung Funktion ist konstante Funktion 0.

$$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0.$$





2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto mx + b$

Ist überall differenzierbar

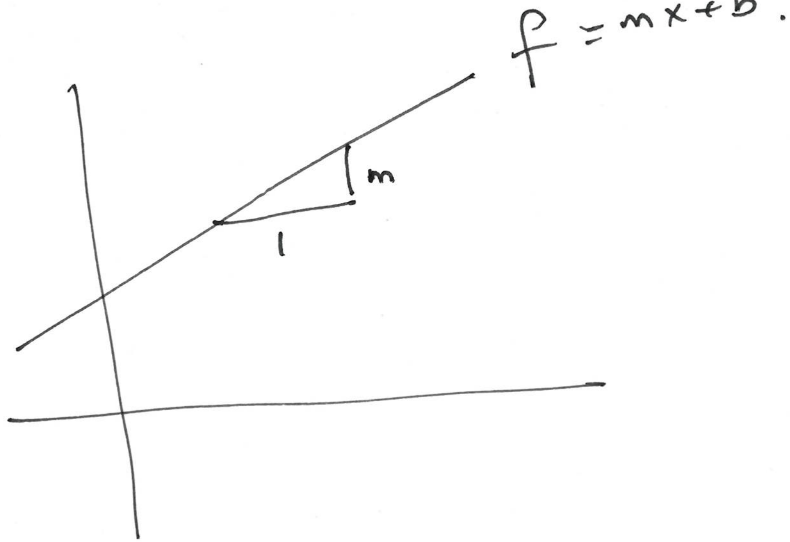
und $f'(x) = m \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

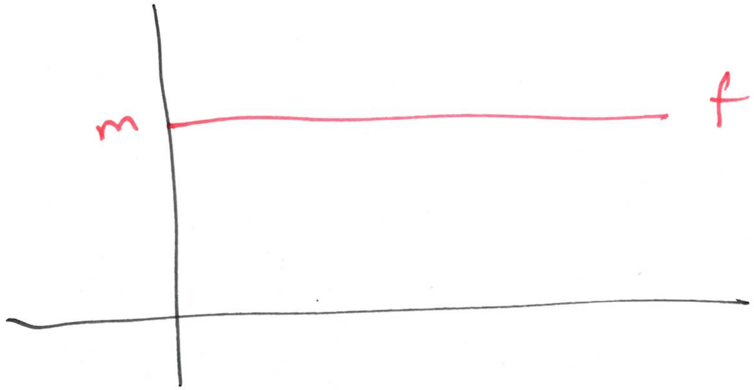
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(mx+b) - (mx_0+b)}{x - x_0}$$

$$= \frac{m(x - x_0)}{(x - x_0)} = m$$

Falls $x \neq x_0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$





③ $f(x) = x^2$ ist diff-
$\forall x \in \mathbb{R}$ mit
$$f'(x) = 2x$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h}$$

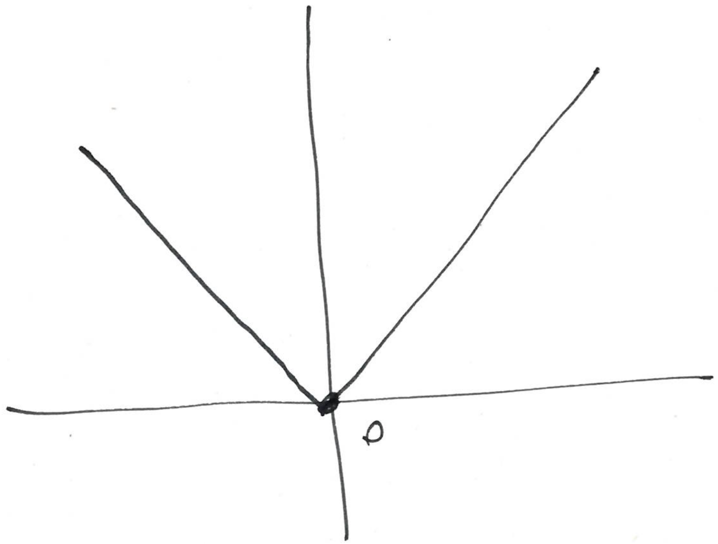
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x_0 + h$$

$$= 2x_0 .$$

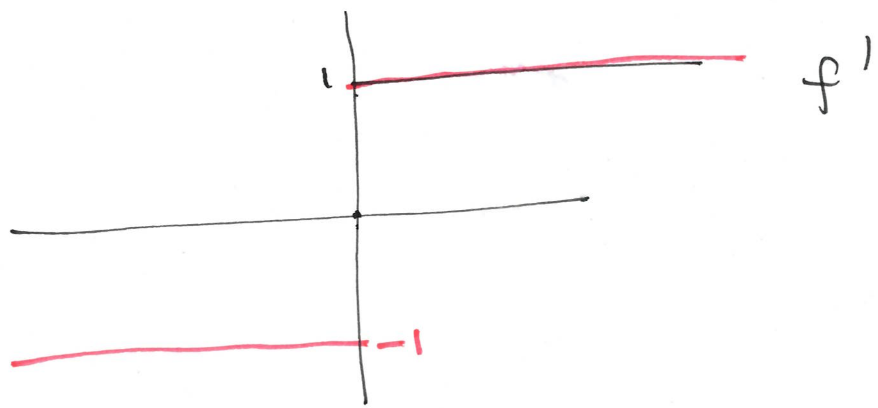
④ $f(x) = |x|$

ist für alle $x \neq 0$ differenzierbar, aber nicht für $x = 0$.



$$f(x) - f(0) = \begin{cases} x & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ -x & \quad\quad\;\; x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x) - 0}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases}$$



Also $\lim \frac{f(x) - 0}{x - 0}$ nicht existiert

Clicker Frage

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. welche der folgenden Bedingungen stellt sicher dass

$$\lim_{x \to \pi} f(x) = 2$$

a) $\lim_{x \to \pi} f(x) \cos x = -2$ ✓

b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 1$ so dass $\forall n \geq N$: $\left|f\left(\pi + \frac{1}{n}\right) - 2\right| < \varepsilon$ X

c) $\lim_{n \to \infty} f\left(\pi + \frac{1}{n}\right) = 2$. X

a) $\lim_{x \to \pi} \cos x = \cos \pi = -1 \neq 0$.

$\lim_{x \to \pi} f(x) \cos x$ existiert

$\Leftrightarrow \lim_{x \to \pi} f(x)$ existiert.

und in diesem fall

$-2 = \lim_{x \to \pi} f(x) \cos x = \left(\lim f(x)\right)(-1)$

$\Rightarrow \lim f(x) = 2$.

$\lim_{x \to \pi} f(x)$ existiert, und, $= L$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{\forall}}\ (a_n)_{n \geq 1}$ mit $\lim a_n = \pi$

$\lim f(a_n) = L$.

Die Defn von Grenzwert

mit Folgen erfordert

dass für jede Folge

die Grenzwert π hat,

$\lim f(a_n) = 2$.

b,c) ~~Das~~ zeigen nur dass

für die Folge

$(a_n)_{n\geq 1} = \left(\left(\pi + \frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$

$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 2$.