

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Lernkontrolle 1

Angabe

Bitte noch nicht umblättern!

Dauer: 45 Minuten.

Erlaubte Hilfsmittel: 10 A4-Seiten (=5 Bl.) eigene Notizen, von Hand geschrieben. Taschenrechner oder andere smarte Geräte sind nicht erlaubt.

Bitte beachten Sie zunächst folgende Punkte:

- Schalten Sie Ihr **Handy aus** und legen Sie es weg - ebenso Ihre Smartwatch. **Sie dürfen während der Prüfung keine smarten Geräte - ausser Ihrem Kopf - bei sich tragen.**
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und **nicht** mit roter oder grüner Farbe.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.1 Welche dieser Funktionen ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte f_X einer reellwertigen Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$?

- (a) $x \mapsto \frac{1}{1000} e^{-x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$
- (b) $x \mapsto \begin{cases} \sin(x), & \text{falls } x \in [0, 3\pi] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
- (c) $x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ x, & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 1, & \text{falls } x > \frac{1}{3} \end{cases}$
- (d) $x \mapsto \begin{cases} \frac{-1}{100x}, & \text{falls } x < -1 \\ \frac{1}{3}, & \text{falls } x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{2} + x, & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{4}) \\ 1, & \text{falls } x \geq \frac{1}{4} \end{cases}$
- (e) $x \mapsto \begin{cases} 100, & \text{falls } x \in (-\frac{1}{200}, 0] \\ 1 - x, & \text{falls } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
- (f) $x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ x, & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1, & \text{falls } x \geq 9 \end{cases}$
- (g) $x \mapsto x$ für $x \in \mathbb{R}$
- (h) $x \mapsto 1$ für $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 1.2 Welche der Funktionen aus Frage 1.1 ist eine Verteilungsfunktion¹ F_X einer reellwertigen Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$?

Aufgabe 1.3 Wir betrachten 3 Urnen A , B und C . Urne A enthält 3 weiße und 4 schwarze Kugeln, Urne B enthält 5 weiße und 3 schwarze Kugeln, und Urne C enthält 1 weiße und 3 schwarze Kugeln.

Zuerst wird eine der 3 Urnen zufällig gewählt, wobei Urne A mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, \frac{1}{3}]$ gewählt wird und Urne B mit Wahrscheinlichkeit $2p$. Danach wird zufällig eine Kugel aus der gewählten Urne entnommen.

- (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit (abhängig von p), dass die gezogene Kugel schwarz ist.
- (b) Wir nehmen jetzt an, dass die gezogene Kugel weiss ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ursprünglich die Urne C gewählt wurde.

Aufgabe 1.4 Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Laplace-Modell auf $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.

- (a) Sind die Ereignisse $A = \{1\}$ und $B = \{2, 3\}$ unabhängig?
- (b) Sind die Ereignisse $B = \{2, 3\}$ und $C = \{3, 4\}$ unabhängig?

¹Die Verteilungsfunktion F_X wird in der Literatur häufig auch als Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion, kumulative (Wahrscheinlichkeits-)Verteilungsfunktion, cumulative (probability) distribution function, cdf oder CDF bezeichnet.