D–ITET

Prüfung Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

401-0604-00L

Angabe Lernkontrolle 2

Bitte noch nicht umblättern!

1. Multiple choice **[6 Punkte]**

(a) **[1.5 Punkte]** Es seien X und Y i.i.d. Zufallsvariablen mit Varianz $\sigma^2 \in \mathbb{R}_{>0}$. Was ist die Standardabweichung der Zufallsvariable $Z := X + X - Y$?

i. σ.
ii. 3σ.
iii. 5σ.
iv. $\sqrt{3}\sigma$.
v. $\sqrt{5}\sigma$.

(b) **[1.5 Punkte]** Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\left[X_1^2\right] < \infty$. Sei Z eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable. Wir definieren $\mu := \mathbb{E}\left[X_1\right]$ und $\sigma^2 := \sigma^2_{X_1}$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

i. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{1}{\sigma^2 n}\sum_{i=1}^n X_i \leq a\right] = \mathbb{P}\left[Z \leq a\right], \ \forall a \in \mathbb{R}$.
ii. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{1}{\sigma^2 n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \leq a\right] = \mathbb{P}\left[Z \leq a\right], \ \forall a \in \mathbb{R}$.
iii. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 n}}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \leq a\right] = \mathbb{P}\left[Z \leq a\right], \ \forall a \in \mathbb{R}$.
iv. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 n}}\sum_{i=1}^n X_i \leq a\right] = \mathbb{P}\left[Z \leq a\right], \ \forall a \in \mathbb{R}$.

(c) **[1.5 Punkte]** Gilt die richtige Antwort von Frage **1.**b auch für endliche n exakt (also wenn man $\lim_{n\to\infty}$ weglassen würde)?

i. Ja, die richtige Antwort von Frage **1.**b gilt auch wenn man $\lim_{n\to\infty}$ weglasst für alle Verteilungen die $\mathbb{E}\left[X_1^2\right] < \infty$ erfüllen.
ii. Die richtige Antwort von Frage **1.**b gilt auch wenn man $\lim_{n\to\infty}$ weglasst, falls $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ normalverteilt ist, aber nicht für andere Verteilungen.
iii. Nein, die richtige Antwort von Frage **1.**b gilt nicht wenn man $\lim_{n\to\infty}$ weglasst auch nicht für normalverteilte X_i.

(d) **[1.5 Punkte]** Seien X und Y Zufallsvariablen. Unter welchen Vorraussetzungen ist die gemeinsame Verteilungsfunktion $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1], (x,y) \mapsto F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}\left[X \leq x, Y \leq y\right]$ durch die Verteilungsfunktionen F_X und F_Y von X und Y eindeutig definiert? (Falls mehrere Antworten korrekt sind, zählt nur die Antwort als korrekt, die weniger Voraussetzungen als alle anderen korrekten Antworten macht.[1])

i. Immer. Sobald man die Verteilung von X und die von Y kennt, kennt man auch die gemeinsame Verteilung.
ii. Unter der Voraussetzung, dass X und Y unabhängig sind.
iii. Unter der Voraussetzung, dass X und Y identisch verteilt sind ($F_X = F_Y$).
iv. Unter der Voraussetzung, dass X und Y diskret sind.
v. Unter der Voraussetzung, dass X und Y Bernoulli verteilt sind.
vi. Unter der Voraussetzung, dass X und Y kontinuierlich sind.
vii. Unter der Voraussetzung, dass X und Y normalverteilt verteilt sind.
viii. Keine dieser Voraussetzungen ist ausreichend.

[1] Wenn beispielsweise **1.**(d)i richtig wäre, dann wären die anderen bis auf die letzte auch mathematisch richtig, aber man würde nur für **1.**(d)i Punkte bekommen, weil die anderen Antworten dann nutzlose Voraussetzungen machen würden.

2. Dreieck **[9 Punkte]**

Betrachte die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1-x, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Ist $f_{X,Y}$ die Dichte einer Uniformverteilung auf einem rechtwinkeligen Dreieck mit Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$? [**0.5 Punkte**]

(b) Berechne die Randichten f_X und f_Y von X und Y. [**1.5 Punkte**]

(c) Sind X und Y unabhängig? Warum? [**1 Punkt**]

(d) Sind X, Y identisch verteilt? Warum? [**0.5 Punkte**]

(e) Sind X, Y i.i.d.? Warum? [**0.5 Punkte**]

(f) Berechne $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[XY - Y]$ und $\mathbb{E}[X^2]$.[**3 Punkte**]

(g) Berechne die Varianz und die Standardabweichung von X.[**1 Punkt**]

(h) Berechne die Dichte $f_{\log X}$ von $\log X$.[**1 Punkt**]

Tabelle der Standardnormalverteilung

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Zum Beispiel ist $P[Z \leq 1.96] = 0.975$.