Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Lösungen Lernkontrolle 1

Aufgabe 1.1 Welche dieser Funktionen ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte f_X einer reellwertigen Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$?

(a) $x \mapsto \frac{1}{1000}e^{-x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$

(b) $x \mapsto \begin{cases} \sin(x), & \text{falls } x \in [0, 3\pi] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

(c) $x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ x, & \text{falls } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ 1, & \text{falls } x > \frac{1}{3} \end{cases}$

(d) $x \mapsto \begin{cases} \frac{-1}{100x}, & \text{falls} x < -1 \\ \frac{1}{3}, & \text{falls } x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{2} + x, & \text{falls } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \\ 1, & \text{falls } x \geq \frac{1}{4} \end{cases}$

(e) $x \mapsto \begin{cases} 100, & \text{falls } x \in \left(-\frac{1}{200}, 0\right] \\ 1 - x, & \text{falls } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

(f) $x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ x, & \text{falls } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 1, & \text{falls } x \geq 9 \end{cases}$

(g) $x \mapsto x$ für $x \in \mathbb{R}$

(h) $x \mapsto 1$ für $x \in \mathbb{R}$

Lösung 1.1 (e) ist zwar streng genommen keine Dichter, weil (aufgrund von einem Typo in der Angabe) $f_X(0)$ doppelt definiert ist und somit (e) keine wohldefinierte Funktion ist. Wenn man eine Dichte allerdings nur an endlich vielen Punkten verändert, ändert sich die Verteilung der Zufallsvariable X nicht, somit wäre es völlig irrelevant welchen Wert man für $f_X(0)$ festlegt. f_X aus (e) ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte, wenn man für $f_X(0)$ einen beliebigen Wert aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$ wählt, weil sowohl $f_X(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt als auch $\inf_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ gilt.

Für die Lernkontrolle zählen wir beides als richtig, wenn man sagt, dass (e) eine Dichte ist und wenn man sagt, dass (e) keine Dichte ist. Für die Prüfung werden wir probieren solche Fälle zu vermeiden. (Wenn eine Verteilungsfunktion für ein $x \in \mathbb{R}$ nicht eindeutig definiert ist, ist es automatisch keine Funktion und somit keine Verteilungsfunktion mehr, aber für Dichten kann man argumentieren, dass einzelne Punkte eh egal sind.)

Für die anderen Funktionen geben wir jeweils einen Grund an weshalb es sich nicht um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt auch wenn es teilweise mehrere Gründe gibt.

(a) ist keine Wahrscheinlichkeitsdichte, weil das Integral über die Funktion viel kleiner als 1 ist ($\frac{\sqrt{\pi}}{1000}$), was man direkt daran erkennt, dass der Vorfaktor stark von dem der Normalverteilungsdichte abweicht.

(b) und (g) sind keine Dichten, weil auch negative Werte angenommen werden.

(d), (f), (c) und (h) sind keine Wahrscheinlichkeitsdichten, weil das Integral über diese Funktionen unendlich anstatt 1 ist.

Aufgabe 1.2 Welche der Funktionen aus Frage 1.1 ist eine Verteilungsfunktion[1] F_X einer reellwertigen Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$?

Lösung 1.2 Die Funktion aus (d). Die Funktion F_X aus (d) ist eine Verteilungsfunktion, weil F_X alle Bedinungen aus Theorem 1.18 aus dem Skript erfüllt.

Für die anderen Funktionen geben wir jeweils einen Grund an weshalb es sich nicht um eine Verteilungsfunktion handelt auch wenn es teilweise mehrere Gründe gibt.

(a), (b) und (e) sind nicht monoton steigend.

(c) ist nicht rechts-stetig.

(f) ist nicht überall definiert.

(g) und (h) erfüllen nicht $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

Aufgabe 1.3 Wir betrachten 3 Urnen A, B und C. Urne A enthält 3 weisse und 4 schwarze Kugeln, Urne B enthält 5 weisse und 3 schwarze Kugeln, und Urne C enthält 1 weisse und 3 schwarze Kugeln.

Zuerst wird eine der 3 Urnen zufällig gewählt, wobei Urne A mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, \frac{1}{3}]$ gewählt wird und Urne B mit Wahrscheinlichkeit $2p$. Danach wird zufällig eine Kugel aus der gewählten Urne entnommen.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit (abhängig von p), dass die gezogene Kugel schwarz ist.

(b) Wir nehmen jetzt an, dass die gezogene Kugel weiss ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ursprünglich die Urne C gewählt wurde.

Lösung 1.3

(a) Sei $p_S(p)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Dann:

$$\begin{aligned} p_S(p) &= p \cdot \frac{4}{7} + 2p \cdot \frac{3}{8} + (1-3p) \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{13}{14} \cdot p. \end{aligned}$$

(b) Sei $\mathcal{C}$ das Ereignis “Die Urne C wird gewählt” und $\mathcal{W}$ das Ereignis “Die gezogene Kugel ist weiss”. Dann kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit geschrieben werden als $P(\mathcal{C}|\mathcal{W})$. Deshalb haben wir:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{C}|\mathcal{W}) &= \frac{P(\mathcal{W}|\mathcal{C})P(\mathcal{C})}{P(\mathcal{W})} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \cdot (1-3p)}{1 - p_S(p)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot p}{\frac{1}{2} + \frac{13}{7} \cdot p}. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.4 Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Laplace-Modell auf $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Sind die Ereignisse $A = \{1\}$ und $B = \{2, 3\}$ unabhängig?

[1] Die Verteilungsfunktion F_X wird in der Literatur häufig auch als Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion, kumulative (Wahrscheinlichkeits-)Verteilungsfunktion, **c**umulative (probability) **d**istribution **f**unction, cdf oder CDF bezeichnet.

(b) Sind die Ereignisse $B = \{2, 3\}$ und $C = \{3, 4\}$ unabhängig?

Lösung 1.4

(a) Nein, die Ereignisse $A = \{1\}$ und $B = \{2, 3\}$ sind abhängig, weil $\mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B] = \frac{|A|}{|\Omega|}\frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}\frac{2}{4} = \frac{1}{8} \neq 0 = \mathbb{P}[\varnothing] = \mathbb{P}[A \cap B]$

(b) Ja, die Ereignisse $B = \{2, 3\}$ und $C = \{3, 4\}$ sind unabhängig, weil $\mathbb{P}[B]\,\mathbb{P}[C] = \frac{|B|}{|\Omega|}\frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{2}{4}\frac{2}{4} = \frac{1}{4} = \frac{|\{3\}|}{|\Omega|} = \frac{|B \cap C|}{|\Omega|} = \mathbb{P}[A \cap B]$