Lernkontrolle 2 und Lösungsvorschlag

1. Multiple choice [6 Punkte]

(a) [**1.5 Punkte**] Es seien X und Y i.i.d. Zufallsvariablen mit Varianz $\sigma^2 \in \mathbb{R}_{>0}$. Was ist die Standardabweichung der Zufallsvariable $Z := X + X - Y$?

i. σ.
ii. 3σ.
iii. 5σ.
iv. $\sqrt{3}\sigma$.
v. $\sqrt{5}\sigma$.

Lösung:

1.(a)v. Für jede Zufallsvariable $\widetilde{X}$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sigma^2_{c\widetilde{X}} = \mathbb{E}\left[\left(c\widetilde{X} - \mathbb{E}\left[c\widetilde{X}\right]\right)^2\right] = c^2 \cdot \mathbb{E}\left[\left(\widetilde{X} - \mathbb{E}\left[\widetilde{X}\right]\right)^2\right] = c^2 \cdot \sigma^2_{\widetilde{X}}.$$

Somit folgt aus der Unabhängigkeit mit Proposition 2.42 aus dem Skript

$$\sigma^2_Z = \sigma^2_{2X-Y} = \sigma^2_{2X} + \sigma^2_{-Y} = 2^2\sigma^2_X + (-1)^2\sigma^2_Y = 4\sigma^2 + \sigma^2 = 5\sigma^2.$$

Somit gilt $\sigma_Z = \sqrt{5}\sigma$

(b) [**1.5 Punkte**] Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\left[X_1^2\right] < \infty$. Sei Z eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable. Wir definieren $\mu := \mathbb{E}\left[X_1\right]$ und $\sigma^2 := \sigma^2_{X_1}$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

i. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{1}{\sigma^2 n}\sum_{i=1}^n X_i \le a\right] = \mathbb{P}\left[Z \le a\right], \ \forall a \in \mathbb{R}.$
ii. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{1}{\sigma^2 n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \le a\right] = \mathbb{P}\left[Z \le a\right], \ \forall a \in \mathbb{R}.$
iii. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 n}}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \le a\right] = \mathbb{P}\left[Z \le a\right], \ \forall a \in \mathbb{R}.$
iv. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 n}}\sum_{i=1}^n X_i \le a\right] = \mathbb{P}\left[Z \le a\right], \ \forall a \in \mathbb{R}.$

Lösung:

1.(b)iii.Dies ist die Aussage von Theorem 3.18 (Zentraler Grenzwertsatz) aus dem Skript, wobei wir $\mathbb{P}\left[Z \le a\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^a e^{-x^2/2}dx$ verwendet haben (siehe Example 3 in Kapitel 3 des Skripts für die Dichte von Z).

(c) [**1.5 Punkte**] Gilt die richtige Antwort von Frage **1.**b auch für endliche n exakt (also wenn man $\lim_{n\to\infty}$ weglassen würde)?

i. Ja, die richtige Antwort von Frage **1.**b gilt auch wenn man $\lim_{n\to\infty}$ weglasst für alle Verteilungen die $\mathbb{E}\left[X_1^2\right] < \infty$ erfüllen.
ii. Die richtige Antwort von Frage **1.**b gilt auch wenn man $\lim_{n\to\infty}$ weglasst, falls $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ normalverteilt ist, aber nicht für andere Verteilungen.

iii. Nein, die richtige Antwort von Frage **1.**b gilt nicht wenn man $\lim_{n\to\infty}$ weglasst auch nicht für normalverteilte X_i.

Lösung:

> **1.**(c)ii. Von den Properties of normal random variables, die auf Seite 50 des Skripts beschreiben werden, kann man wie auf Seite 62 des Skripts herleiten, dass
>
> $$\mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\leq a\right]=\mathbb{P}\left[Z\leq a\right],\ \forall a\in\mathbb{R}$$
>
> exakt gilt, wenn $X_i\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ normalverteilt sind. Somit ist **1.**(c)iii falsch.
>
> **1.**(c)i ist auch offensichtlich falsch: Wenn X_i zum Beispiel eine diskrete unabhängige Zufallsvariablen sind, dann ist $\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)$ auch diskret und kann somit nicht die gleiche Verteilung haben wie eine kontinuierliche Zufallsvariable $Z\sim\mathcal{N}(0,1)$. (Auch für kontinuierliche i.i.d. Zufallsvariablen gilt die exakte Gleichheit für endliche n nicht, wenn diese nicht normalverteilt sind. Für allgemeine Zufallsvariabeln ist die Gleichheit bis auf eine kleine Abweichung korrekt, wenn n gross ist, aber exakt wird die Gleichung erst im Limes $n\to\infty$.)

(d) [**1.5 Punkte**] Seien X und Y Zufallsvariablen. Unter welchen Vorraussetzungen ist die gemeinsame Verteilungsfunktion $F_{X,Y}:\mathbb{R}^2\to[0,1],(x,y)\mapsto F_{X,Y}(x,y)=\mathbb{P}\left[X\leq x,Y\leq y\right]$ durch die Verteilungsfunktionen F_X und F_Y von X und Y eindeutig definiert? (Falls mehrere Antworten korrekt sind, zählt nur die Antwort als korrekt, die weniger Voraussetzungen als alle anderen korrekten Antworten macht.[1])

i. Immer. Sobald man die Verteilung von X und die von Y kennt, kennt man auch die gemeinsame Verteilung.
ii. Unter der Voraussetzung, dass X und Y unabhängig sind.
iii. Unter der Voraussetzung, dass X und Y identisch verteilt sind ($F_X=F_Y$).
iv. Unter der Voraussetzung, dass X und Y diskret sind.
v. Unter der Voraussetzung, dass X und Y Bernoulli verteilt sind.
vi. Unter der Voraussetzung, dass X und Y kontinuierlich sind.
vii. Unter der Voraussetzung, dass X und Y normalverteilt verteilt sind.
viii. Keine dieser Voraussetzungen ist ausreichend.

Lösung:

> **1.**(c)ii. Definition 1.32 im Skript zeigt direkt, dass **1.**(c)ii mathematisch richtig ist.
>
> Alle anderen ANtworten sind falsch. Gegenbeispiel für alle anderen Antworten: Sei $F_X=F_Y$, dann könnte $F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$ sein (was bedeuten würde, dass die beiden Zufallsvariablen unabhängig sind) oder zum Beispiel $F_{X,Y}(x,y)=F_X(\min(x,y))$ (was bedeuten würde, dass $X=Y$ $\mathbb{P}$-fast sicher gilt). Dieses Gegenbeispiel kann man für auch für binomialverteile Zufallsvaraiblen verwenden (welches eine diskrete Zufallsvraiblen

[1] Wenn beispielsweise **1.**(d)i richtig wäre, dann wären die anderen bis auf die letzte auch mathematisch richtig, aber man würde nur für **1.**(d)i Punkte bekommen, weil die anderen Antworten dann nutzlose Voraussetzungen machen würden.

sind) als auch für normalverteilte Zufallsvariablen (welche kontinuierliche Zufallsvariablen sind).

2. Dreieck **[9 Punkte]**

Betrachte die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1-x, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Ist $f_{X,Y}$ die Dichte einer Uniformverteilung auf einem rechtwinkeligen Dreieck mit Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$? [**0.5 Punkte**]

(b) Berechne die Randichten f_X und f_Y von X und Y. [**1.5 Punkte**]

(c) Sind X und Y unabhängig? Warum? [**1 Punkt**]

(d) Sind X, Y identisch verteilt? Warum? [**0.5 Punkte**]

(e) Sind X, Y i.i.d.? Warum? [**0.5 Punkte**]

(f) Berechne $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[XY - Y]$ und $\mathbb{E}[X^2]$.[**3 Punkte**]

(g) Berechne die Varianz und die Standardabweichung von X.[**1 Punkt**]

(h) Berechne die Dichte $f_{\log X}$ von $\log X$.[**1 Punkt**]

Lösung:

(a) Yes.

(b) The marginal density of X is[a]

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} 2 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,1-x]}(y)dy = \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \int_0^{1-x} 2dy = 2(1-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x),$$

Aus Symmetrie-Gründen gilt $f_Y(y) = 2(1-y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$ wie wir auch nochmals nachrechnen könnten:[b]

$$\begin{aligned} f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} 2 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,1-x]}(y)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\mathbb{1}_{[-\infty,1-x)}(y)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\mathbb{1}_{[-\infty,1-y)}(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2 \cdot \mathbb{1}_{[0,1-y]}(x)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2 \cdot \mathbb{1}_{[0,1-y]}(x)\mathbb{1}_{(-\infty,1]}(y)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)dx \\ &= \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \int_0^{1-y} 2dx = 2(1-y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y). \end{aligned}$$

(c) No, X and Y are not independent. We can see this immediately since

$$f_X(\frac{3}{4})f_Y(\frac{3}{4}) = 2(1-\frac{3}{4})\mathbb{1}_{[0,1]}(\frac{3}{4})2(1-\frac{3}{4})\mathbb{1}_{[0,1]}(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq 0 = f_{X,Y}(\frac{3}{4},\frac{3}{4}).$$

(d) Yes, they are identically distributed, since they have the same cdf, because[c] they have the same density $f_X = f_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto 2(1-t)\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$.

(e) No, they are not i.i.d., since we have already shown that they are not indpendent.

(f) By using the densities f_X and f_Y from **2.**b, we compute

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x2(1-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)dx = \int_0^1 2x - 2x^2 dx = \frac{2\cdot 1^2}{2} - 0 + \frac{2\cdot 1^3}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

and analogously

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{3} \approx 0.3334.$$

Alternatively one could directly compute more tediously

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}^2} x f_{X,Y}(x,y)dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 x2\mathbb{1}_{[0,1-x]}(y)\, dxdy \\ &= \cdots = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \int_{\mathbb{R}^2} xy f_{X,Y}(x,y)dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 xy2\mathbb{1}_{[0,1-x](y)}\, dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 xy2\mathbb{1}_{[0,1-x](y)}\, dydx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy2\, dydx \\ &= \int_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2}2 - 0\, dx \\ &= \int_0^1 x(1-2x+x^2)\, dx \\ &= \int_0^1 x - 2x^2 + x^3\, dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{6-8+3}{12} \\ &= \frac{1}{12} \approx 0.0833334.\end{aligned}$$

Achtung: $\mathbb{E}[XY]$ ist ungleich $\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ in diesem Fall. (Falls X und Y unabhängig wären, dann würde $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ gelten, aber in diesem Beispiel sind sie nicht unabhängig.)
Wegen der Linearität des Erwartungswert gilt $\mathbb{E}[XY - Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1-4}{12} = -\frac{1}{4}$.
By using the density f_X from **2.**b, we compute

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 2(1-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)dx = \int_0^1 2x^2 - 2x^3 dx = \frac{2\cdot 1^3}{3} + \frac{2\cdot 1^4}{4} - 0 = \frac{1}{6}.$$

Alternatively one could directly compute

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_{\mathbb{R}^2} x^2 f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} x^2 f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 x^2 2\mathbb{1}_{[0,1-x]}(y)\,dxdy$$
$$= \cdots = \frac{1}{6}.$$

(g) Unter Verwendung der Resultate aus **2.**f berechnen wir die Varianz

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18} \approx 0.055556$$

und die Standardabweichung

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \approx 0.2357.$$

Alternativ kann man auch direkt aber aufwendiger die Varianz berechnen:

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(X - \frac{1}{3}\right)^2\right] = \int_0^1\int_0^1 \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 2\mathbb{1}_{[0,1-x]}(y)\,dxdy = \cdots = \frac{1}{18} \quad \text{or}$$
$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(X - \frac{1}{3}\right)^2\right] = \int_{\mathbb{R}} \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 f_X(x)dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 2(1-x)\,dx = \cdots = \frac{1}{18}.$$

(h) Da wir wissen, dass X $\mathbb{P}$-fast sicher positiv ist, ist $\log X$ $\mathbb{P}$-fast sicher wohl definiert. Wir berechnen

$$f_{\log X}(a) = \frac{d}{da}F_{\log X}(a) = \frac{d}{da}\mathbb{P}[\log X \le a] = \frac{d}{da}\mathbb{P}[X \le e^a] = \frac{d}{da}F_X(e^a) \qquad (1)$$
$$= F_X'(e^a)e^a = f_X(e^a)e^a = 2(1-e^a)\mathbb{1}_{[0,1]}(e^a)e^a = 2(e^a - e^{2a})\mathbb{1}_{(-\infty,log(1)]}(a). \qquad (2)$$

[a] If $a < b$, we define $[b,a] = \varnothing$.
[b] Beachte, dass (wegen Fußnote a) $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)dx = \int_a^b 1dx$ nur für $b < a$ gilt. Im allgemeinen gilt $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)dx = \mathbb{1}_{(-\infty,b]}(a)\int_a^b 1dx$
[c] If $f_X = f_Y$, one can directly see that $F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(t)dt = \int_{-\infty}^a f_Y(t)dt = F_Y(a)\ \forall a \in \mathbb{R}$.

Tabelle der Standardnormalverteilung

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Zum Beispiel ist $P[Z \leq 1.96] = 0.975$.