Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 2

Version 1 (25. Februar 2022)

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum des Moodle-Kurs (und/oder (anonym) in diesem file https://docs.google.com/document/d/1CfTkwrN0hTKB8y8cVQW_deUahCejTbQWlm_BzrHIFYA/edit?usp=sharing)

Wir empfehlen die Aufgaben selbständig zu lösen und dann im Fach der entsprechenden Übungsgruppe im Raum HG G 53 abzugeben oder selbst mit der Lösung zu vergleichen am besten rechtzeitig vor der Übung am **07. März**.

Aufgabe 2.1 One coin is flipped and one die is rolled.

(a) Define a suitable probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ space using a Laplace model.

(b) Define random variables $X : \Omega \to \mathbb{R}$ and $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ on this probability space such that X and Y represent the outcome of flipping the coin and of the roll of the die, respectively.

(c) Show that $\mathbb{P}[X = x, Y = y] = \mathbb{P}[X = x]\,\mathbb{P}[Y = y]$ for all $x, y \in \mathbb{R}$. (This means that the random variables X and Y are independent; see later.)

Aufgabe 2.2 We have two dice. One is ordinary with the numbers $1, 2, 3, 4, 5, 6$ and one is special where 6 is replaced by 7 (i.e. $1, 2, 3, 4, 5, 7$). We flip a coin to decide which die is rolled. If flipping the coin results in heads, the ordinary die is rolled, otherwise the special die is rolled.

(a) Define a suitable probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ using a Laplace model.

  (i) Define random variables $X : \Omega \to \mathbb{R}$ and $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ such that X and Y represent the outcomes of flipping the coin and of the roll of the die, respectively.

  (ii) What is the cardinality $|\mathcal{F}|$? Give examples of events $E_1, E_2, E_3, E_4 \in \mathcal{F}$ such that $\mathbb{P}[E_i] \neq \mathbb{P}[E_j]\,,\ \forall i \neq j$.

(b) What is the probability that rolling the die results in an even number?

(c) Show that $\mathbb{P}[X = x, Y = y] \neq \mathbb{P}[X = x]\,\mathbb{P}[Y = y]$ for some $x, y \in \mathbb{R}$. (This means that the random variables X and Y are not independent; see later and cf. Aufgabe 2.1.)

Aufgabe 2.3

(a) Seien A und B zwei Ereignisse mit

$$\mathbb{P}[A^c] = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}[B^c] = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}[A^c \cap B^c] = p.$$

Bestimmen Sie als Funktion von p

  (i) die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[A \cap B]$, $\mathbb{P}[A \cap B^c]$ und $\mathbb{P}[A^c \cap B]$. In welchem Bereich darf p liegen?

  (ii) die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens i der beiden Ereignisse A und B eintreten, wobei $i = 0, 1, 2$.

Wenn du Feedback zum Übungszettel hast, schreibe bitte eine Mail an Jakob Heiss.