Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 5

Version 1.1 (15. Mai 2022: Schönere Anführungszeichen in Aufgabe 5.4 verwendet auf Wunsch von jemandem im Google-Doc); Version 1 (18. März)

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum des Moodle-Kurs (und/oder (anonym) in diesem file https://docs.google.com/document/d/1CfTkwrN0hTKB8y8cVQW_deUahCejTbQWlm_BzrHIFYA/edit?usp=sharing)

Vergiss nicht am 28. März pünktlich um spätestens 13:15 in deine Übungsgruppe zur Lernkontrolle zu kommen (im gleichen Raum wo auch sonst immer die Übungsgruppen statt finden, beziehungsweise in LFW C4 für Gruppe 6).

Wir empfehlen die Aufgaben selbständig zu lösen und dann im Fach der entsprechenden Übungsgruppe im Raum HG G 53 abzugeben oder selbst mit der Lösung zu vergleichen am besten rechtzeitig vor der Übung am **04. April**.

Aufgabe 5.1 Zwei Würfel werden unabhängig voneinander geworfen. Wir modellieren dies mit einem Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wobei

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2.$$

Seien X und Y Zufallsvariablen definiert durch $X(\omega) = \omega_1$ und $Y(\omega) = \omega_2$ (X und Y repräsentieren jeweils den Wert des ersten und zweiten Würfels). Betrachten Sie die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \{X \in 2\mathbb{Z}\}, \\ B &= \{1 + Y \in 2\mathbb{Z}\}, \\ C &= \{X + Y \leq 3\}, \\ D &= \{X \leq 2, Y \leq 2\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) A und B sind unabhängig,

(b) A und C sind **nicht** unabhängig,

(c) A und D sind unabhängig,

(d) A, B, D sind paarweise unabhängig. Sind sie unabhängig?

Aufgabe 5.2 Wir betrachten den Wurf eines fairen Tetraeders, markiert mit den Zahlen 1 bis 4. Wir modellieren dies wiederum mit einem Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wobei

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\},$$

wobei jedes $\omega \in \Omega$ gleichwahrscheinlich ist.

Zeigen Sie, dass die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2\}, \\ B &= \{1, 3\}, \\ C &= \{1, 4\}. \end{aligned}$$

paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig sind.

Aufgabe 5.3 Seien A, B und $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ Ereignisse in einer σ-Algebra $\mathcal{F}$. Nehme an, dass die A_i paarweise disjunkt sind.

(a) Zeige, dass A und B unabhängig sind genau dann, wenn A^c und B^c unabhängig sind.

(b) Zeige, falls für alle $i = 1, \ldots, n$, A and A_i paarweise unabhängig sind, dass dann A und $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ unabhängig sind.

(c) Nehme an, dass $\mathbb{P}(A) = 1$ ist. Zeige, dass für alle $B \in \mathcal{F}$, A and B unabhängig sind.

Aufgabe 5.4 Wir betrachten ein Kartenblatt mit den üblichen 52 Karten und 4 Farben (Herz, Kreuz, Karo und Pik). Sind die folgenden Ereignisse unabängig?

(a) Wir ziehen eine Karte und betrachten die Ereignisse $A =$ "Du hast einen König gezogen" und $B =$ "Du hast eine Pik-Karte gezogen".

(b) Wir ziehen zwei Karten **mit Zurücklegen** und betrachten die Ereignisse $A =$ "Du ziehst ein Paar" und $B =$ "Du hast zwei Herzkarten gezogen". Nehme an, dass die Reihenfolge der Verteilten Karten eine Rolle spielt.

(c) Wir ziehen zwei Karten **ohne Zurücklegen** und betrachten die Ereignisse $A =$ "Du ziehst ein Paar" und $B =$ "Du ziehst zwei Kreuz-Karten". Nehme an, dass die Reihenfolge der Karten keine Rolle spielt.

Aufgabe 5.5 Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $A \in \mathcal{F}$. Betrachten Sie die **Indikatorfunktion** $\mathbb{1}_A$ von A, definiert durch

$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{if } \omega \notin A, \\ 1 & \text{if } \omega \in A. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{1}_A$ eine Zufallsvariable ist.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $\mathbb{1}_A$

(c) Sei $B \in \mathcal{F}$ ein anderes Ereignis. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (i) A und B sind unabhängig,

  (ii) Die Zufallsvariablen $\mathbb{1}_A$ und $\mathbb{1}_B$ sind unabhängig.

Aufgabe 5.6

(a) Alice rolls a die (Würfel) and pays the square of the resulting number (quadrierte Augenzahl) to Bob in CHF.

  i) Define a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ that describes rolling the die.

  ii) Define a random variable X that describes how many CHF Bob receives, and write down its distribution (Vertailung).

  iii) Calculate the expected value $\mathbb{E}[X]$.

(b) Three people each toss a fair coin. What is the probability of someone being the "odd man out"? This means that two of the players obtain the same outcome, while the third gets a different one. Please start solving this problem by defining a suitable probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Wenn du Feedback zum Übungszettel hast, schreibe bitte eine Mail an Jakob Heiss.