Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Lösungen Serie 0

Version 1 (17. Februar 2022)

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum des Moodle-Kurs (und/oder (anonym) in diesem file https://docs.google.com/document/d/1CfTkwrN0hTKB8y8cVQW_deUahCejTbQWlm_BzrHIFYA/edit?usp=sharing)

Die 0. Serie dient nur zur Wiederholung der grundlegenden Begriffe der Mengenlehre, daher wird es keinen eigenen Übungstermin geben um diese Serie nachzubesprechen. Fragen zu dieser Serie können aber natürlich gemeinsam mit Fragen zu Serie 1 in der Übung am **Mon, 28. Februar 2022** um 13:15-14:00 gestellt werden oder im Moodle-Forum.

Bitte stelle sicher, das du die Webseite `https://kahoot.it/` in der Übung am **28. Februar** öffnen kannst (zB auf deinem smartphone).

Aufgabe 0.1

(a) Gegeben seien drei Mengen $A, B, C \subset \Omega$. Zeichnen Sie ein Mengendiagramm für:

(i) $A \cup B$
(ii) $A \cap B$
(iii) $(A \cup B)^c$
(iv) $A^c \cap B^c$
(v) $A \cup (B \cap C)$
(vi) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
(vii) $A \cap (B \cup C)$
(viii) $(A \cap C) \cup (A \cap C^c)$

Welche der oberen Mengen sind gleich?

(b) Beweisen Sie (ohne Mengendiagramm), dass

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

gilt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass aus $x \in A \cap (B \cup C)$ die Aussage $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ folgt, und umgekehrt

(c) Betrachten Sie die Menge

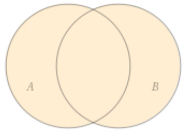
$$A = \bigcup_{i=0}^{\infty} [2i, 2i+1)$$

Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

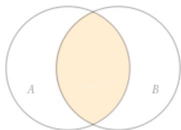
(i) $2 \in A$
(ii) $3 \in A$
(iii) $\pi \in A$
(iv) $10^5 \in A$

Lösung 0.1

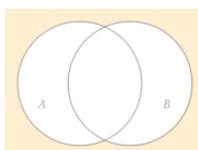
(a)



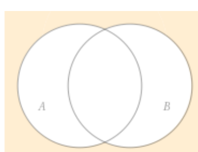
(i)



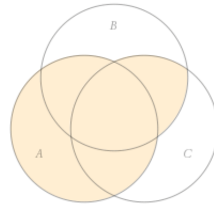
(ii)



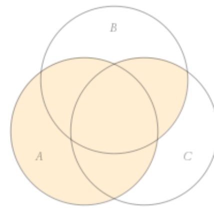
(iii)



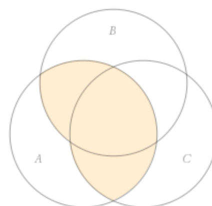
(iv)



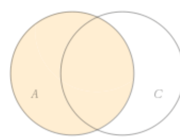
(v)



(vi)



(vii)



(viii)

(b)

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\Rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) && (1)\\
&\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) && (2)\\
&\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) && (3)\\
&\Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C && (4)\\
&\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) && (5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) &\Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C && (6)\\
&\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) && (7)\\
&\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) && (8)\\
&\Rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) && (9)\\
&\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C) && (10)
\end{aligned}
$$

Folglich haben wir gezeigt

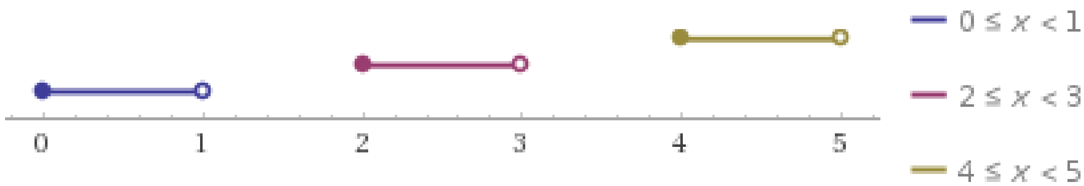
$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

und

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C),$$

somit sind die Mengen gleich.

(c) Die Menge A ist die Vereinigung von Intervallen der Form $[2i, 2i+1)$, welche für $i \in \{1,2,3\}$ folgendermassen aussieht



Die unendliche Menge enthält alle geraden Zahlen, aber enthält nicht die ungeraden natürlichen Zahlen. Damit ist

$$2 \in A$$

$$3 \notin A$$

$$10^5 \in A.$$

Das Intervall $[3,4)$ ist nicht in unserer Menge enthalten, folglich ist

$$\pi \notin A,$$

da $\pi = 3,1415...$ ist.

Aufgabe 0.2 Drücken Sie die folgenden Ereignisse mit Hilfe der Ereignisse A, B und C aus, wobei Sie nur die Symbole A, B, C, ( ), $\cap$, $\cup$, ^{c} verwenden dürfen.

D_1 = „Die Ereignisse A, B und C treten alle ein.“
D_2 = „Mindestens eines der Ereignisse A, B oder C tritt ein.“
D_3 = „Höchstens eines der Ereignisse A, B oder C tritt ein.“
D_4 = „Weder A noch B noch C tritt ein.“
D_5 = „Mindestens eines der Ereignisse A, B oder C tritt nicht ein.“
D_6 = „Genau eines der drei Ereignisse A, B oder C tritt ein.“

Lösung 0.2 Es gilt

$$\begin{aligned}
D_1 &= A \cap B \cap C, \\
D_2 &= A \cup B \cup C, \\
D_3 &= ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))^c = (A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c) \cap (B^c \cup C^c), \\
D_4 &= D_2^c = (A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c, \\
D_5 &= (A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c, \\
D_6 &= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C).
\end{aligned}$$

Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das Moodle-Forum (oder eine Mail an Jakob Heiss).