Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Lösungen Serie 1

Version 1 (17. Februar 2022)

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum des Moodle-Kurs (und/oder (anonym) in diesem file https://docs.google.com/document/d/1CfTkwrN0hTKB8y8cVQW_deUahCejTbQWlm_BzrHIFYA/edit?usp=sharing)

Bitte stelle sicher, das du die Webseite https://kahoot.it/ in der Übung am **28. Februar** öffnen kannst (zB auf deinem smartphone).

Wir empfehlen die Aufgaben selbständig zu lösen und dann im Fach der entsprechenden Übungsgruppe im Raum HG G 53 abzugeben oder selbst mit dieser Lösung zu vergleichen am besten rechtzeitig vor der Übung am **28. Februar**.

Aufgabe 1.1

(a) Mit $A, B, C \subseteq \Omega$ bezeichne man Ereignisse. Welche der folgenden Schreibweisen ergeben einen Sinn und warum bzw. warum nicht?

i) $\mathbb{P}[A \cup (B \cap C)]$

ii) $\mathbb{P}[A^c] \cap \mathbb{P}[B]$

iii) $\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$

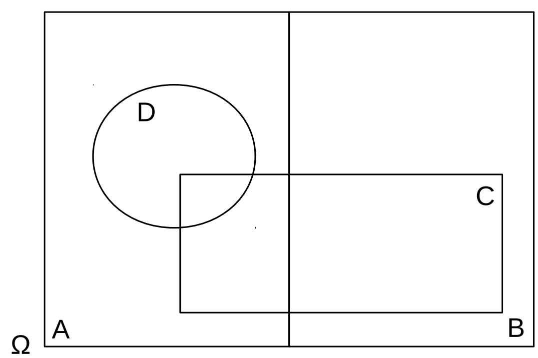
iv) $(\mathbb{P}[B])^c$

(b) Stellen Sie die folgenden Ereignisse im angegebenen Venn-Diagramm dar:

i) $C \cap D$

ii) $(D \setminus C) \cup (C \cap A)$

iii) $B \cup D$



(c) Über einen Nachrichtenkanal werden vier Signale übertragen. Jedes Signal wird entweder richtig oder falsch übertragen. Wir wählen als Grundraum Ω die Menge der 0-1-Folgen der Länge 4 gemäss

$$\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, x_3, x_4) \,:\, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}\},$$

d.h. $\Omega = \{(0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0), \ldots, (1,1,1,1)\}$ und interpretieren (für $i = 1, \ldots, 4$) $x_i = 1$ als "i-tes Signal richtig übertragen" und $x_i = 0$ als "i-tes Signal falsch übertragen".
Ferner betrachten wir folgende Ereignisse:

- A : "Genau ein Signal wird falsch übertragen"
- B : "Mindestens 2 Signale werden richtig übertragen"
- C : "Höchstens 2 Signale werden richtig übertragen".

Nun

i) schreibe die Ereignisse A, B und C als Teilmengen von Ω auf.

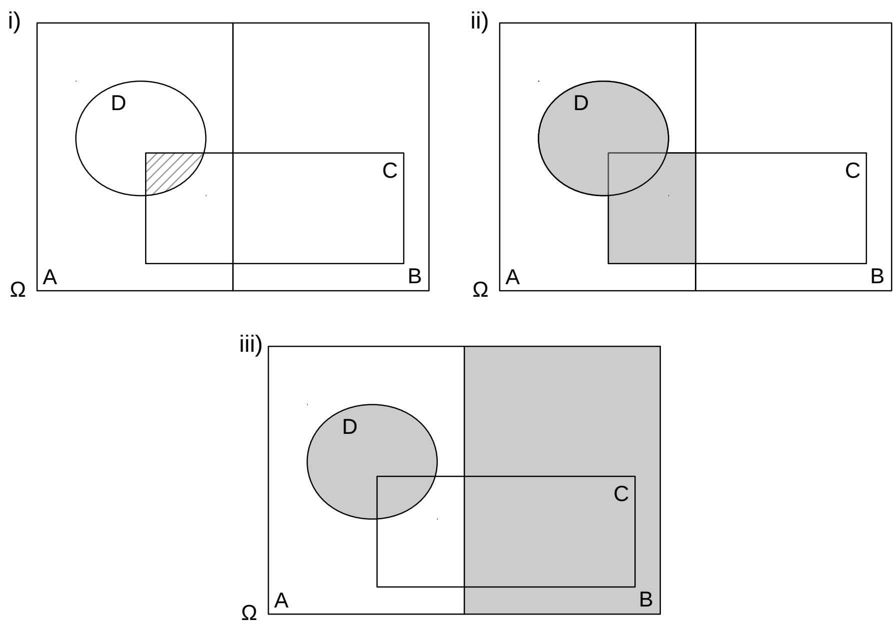
ii) beschreibe in Worten die Ereignisse $B \cap C$, $A \cup B$ und $A^c \cap C^c$.

iii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C unter der Annahme, dass alle Elementarereignisse $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind.

Lösung 1.1

(a) i) und iii) sind sinnvoll; ii) und iv) hingegen nicht. Zu ii): der Durchschnittsoperator "∩" ist nur auf Mengen anwendbar. Zu iv): Komplementärereignisse sind nur auf Mengen und nicht auf Wahrscheinlichkeiten anwendbar.

(b) Die Darstellung ist



(c) i)

$$
\begin{aligned}
A &= \{(0,1,1,1),\ (1,0,1,1),\ (1,1,0,1),\ (1,1,1,0)\} \\
B &= \{(1,1,1,1),\ (0,1,1,1),\ (1,0,1,1),\ (1,1,0,1),\ (1,1,1,0), \\
&\qquad (0,0,1,1),\ (0,1,0,1),\ (0,1,1,0),\ (1,0,0,1),\ (1,0,1,0),\ (1,1,0,0)\} \\
C &= \{(0,0,0,0),\ (1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1), \\
&\qquad (1,1,0,0),\ (1,0,1,0),\ (1,0,0,1),\ (0,1,1,0),\ (0,1,0,1),\ (0,0,1,1)\}
\end{aligned}
$$

ii) $B \cap C$: "Exactly two signals are transmitted correctly."

$A \cup B$: "At least two signals are transmitted correctly (note that $A \subseteq B$)."

A^c: "Either none or at least two of the signals are transmitted incorrectly." Alternative formulation: "All or at most two signals is transmitted correctly." Alternative formulation: "0 or 1 or 2 or 4 signals are transmitted correctly."

C^c: "At least three signals are transmitted correctly." Alternative formulation: "3 or 4 signals are transmitted correctly."

$A^c \cap C^c$: "All of the four signals are transmitted correctly."

(d) Ω hat $2^4 = 16$ Elemente. Da alle Elementarereignisse (x_1, x_2, x_3, x_4) gleich wahrscheinlich sein sollen und sich die Wahrscheinlichkeiten zu Eins summieren müssen, haben alle Elementarereignisse die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{16}$. Um diese Aufgabe rigoros lösen zu können müssen wir einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definieren. Wegen voriger Argumentation wählen wir ein Laplace-Modell.

- Der Grundraum $\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}\}$ ist hier schon in der Angabe gegeben.
- Die σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ kann hier als Potenzmenge von Ω gewählt werden.
- Das Wahrschienlichkeitsmaß muss dann als Abbildung

$$\mathbb{P} : \begin{array}{l} \mathcal{F} \to [0,1] \\ A \mapsto \mathbb{P}[A] := \frac{|A|}{16} \end{array}$$

  definiert werden.

Die Wahrscheinlichkeiten von A, B, C kann man somit bestimmen, indem man jeweils zählt, wieviele Elemente die Ereignisse haben. Also

$$\mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, \ \mathbb{P}[B] = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{11}{16} \text{ und } \mathbb{P}[C] = \frac{11}{16}.$$

Aufgabe 1.2 Ein Würfel wird so lange geworfen, bis eine 6 erscheint. An diesem Punkt wird das Experiment beendet. Was ist der Grundraum dieses Experiments? Sei E_n das Ereignis, dass n mal gewürfelt werden muss, bis das Experiment gestoppt wird. Welche Punkte des Grundraums sind in E_n enthalten? Wie lässt sich das Ereignis $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^c$ in Worten beschreiben?

Lösung 1.2 Das Experiment wird entweder nach endlicher Zeit abgebrochen (nämlich wenn eine 6 gewürfelt wird) oder man würfelt unendlich lange. Also definieren wir

$$\begin{array}{rcl} E_n & = & \{(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, 6) : \omega_i \in \{1, \ldots, 5\}, 1 \le i \le n-1\} \\ E_\infty & = & \{1, \ldots, 5\}^{\mathbb{N}} = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots) : \omega_i \in \{1, \ldots, 5\}, \forall\ i \ge 1\} \end{array}$$

Damit lässt sich der Grundraum als

$$\Omega = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \cup E_\infty$$

darstellen. Beachten Sie, dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ äquivalente Notationen sind und deshalb dieselbe Menge bezeichnen (insbesondere ist E_∞ in der Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ nicht enthalten). Also stellt

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n^c = E_\infty$$

das Ereignis "Es wird nie eine 6 gewürfelt" dar.

Aufgabe 1.3

(a) Seien $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, 3$, beliebige Ereignisse. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] - \mathbb{P}[A_1 \cap A_2].$$

Finden Sie eine ähnliche Formel für $\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup A_3]$.

(b) Wir betrachten ein elektrisches Netzwerk mit drei parallelen Schaltern (R_1, R_2, R_3). Die Wahrscheinlichkeiten dass die Schalter R_1, R_2 und R_3 geschlossen sind, betragen 0.6, 0.55 und 0.5, respektive. Die Wahrscheinlichkeit, dass je zwei Schalter R_i und R_j gleichzeitig geschlossen sind, beträgt 0.25 für alle $i \neq j$. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Schalter geschlossen sind, beträgt 0.1.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Schalter geschlossen ist.

Lösung 1.3

(a) Wir setzten $A_1 \cup A_2 = A$ und verwenden die Formel des Skripts:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup A_3] &= \mathbb{P}[A \cup A_3] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[A_3] - \mathbb{P}[A \cap A_3] \\ &= \mathbb{P}[A_3] + \mathbb{P}[A_1 \cup A_2] - \mathbb{P}[(A_1 \cup A_2) \cap A_3]. \end{aligned}$$

Wir schreiben $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = B \cup C$, wobei $B = A_1 \cap A_3$ und $C = A_2 \cap A_3$, und verwenden

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup A_3] &= \mathbb{P}[A_3] + \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] - \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] \\ &\quad - \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[B \cap C]\end{aligned}$$

Wegen $B \cap C = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, gilt dann:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup A_3] &= \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] + \mathbb{P}[A_3] - \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] - \mathbb{P}[A_1 \cap A_3] \\ &\quad - \mathbb{P}[A_2 \cap A_3] + \mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3]\end{aligned}$$

Beachte, dass diese Rechnungen nur deshalb Sinn machen, weil in jedem Scritt nur Elemente der σ-Algebra $\mathcal{F}$ in $\mathbb{P}$ eingesetzt werden (Weil $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{F}$, wissen wir z.B., dass $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \in \mathcal{F}$). *Bemerkung:* Dies ist ein Spezialfall (für $n = 3$) vom Prinzip der Inklusion und Exklusion

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left[\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right].$$

.

(b) Wir definieren das Ereignis $E_i =$ „Schalter R_i ist geschlossen“. Die obige Formel ergibt dann:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[E_1 \cup E_2 \cup E_3] &= \mathbb{P}[E_1] + \mathbb{P}[E_2] + \mathbb{P}[E_3] - \mathbb{P}[E_1 \cap E_2] \\ &\quad - \mathbb{P}[E_1 \cap E_3] - \mathbb{P}[E_2 \cap E_3] + \mathbb{P}[E_1 \cap E_2 \cap E_3] \\ &= 0.6 + 0.55 + 0.5 - 3 \cdot 0.25 + 0.1 = 1.\end{aligned}$$

Bemerken Sie, dass die Schalter *nicht* unabhängig sind. (Eine genaue mathematische Definition von “unabhängig” wird später in der Vorlesung eingeführt werden.)

Wenn du Feedback zur Serie hast, schreibe bitte in das Moodle-Forum (oder eine Mail an Jakob Heiss).