Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Lösungen Serie 10

Version 1 (20. Mai 2022)

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum des Moodle-Kurs (und/oder (anonym) in diesem file https://docs.google.com/document/d/1CfTkwrNOhTKB8y8cVQW_deUahCejTbQWlm_BzrHIFYA/edit?usp=sharing)

Wir empfehlen die Aufgaben selbständig zu lösen und dann im Fach der entsprechenden Übungsgruppe im Raum HG G 53 abzugeben oder selbst mit dieser Lösung zu vergleichen am besten rechtzeitig vor der Übung am **30. Mai**.

Aufgabe 10.1 It costs 1 dollar to play a certain slot machine in Las Vegas. The machine is set by the house to pay 2 dollars with probability 0.45 and nothing with probability 0.55.

Let X_i be the house's net winnings on the i^{th} play of the machine.

Let $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ be the house's winnings after n plays of the machine. Assuming that successive plays are independent, find:

(a) $\mathbb{E}[S_n]$;

(b) $\sigma^2_{S_n}$;

(c) the approximate probability that after $10,000$ rounds of the machine, the house's winnings are between 800 and $1,100$ dollars.

Lösung 10.1 The house's winnings resulting from each play are independent, and take values

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{with probability } 0.55, \\ -1, & \text{with probability } 0.45. \end{cases}$$

Therefore, one can observe that

$$B_i := \frac{X_i + 1}{2}$$

are independent Ber(0.55) random variables, and that

$$\tilde{S}_n = \frac{S_n + n}{2} \text{ or } S_n = 2\tilde{S}_n - n,$$

where $\tilde{S}_n := \sum_{i=1}^n B_i$ has a $\mathrm{Bin}(n, 0.55)$ distribution.

From the considerations above,

(a)
$$\mathbb{E}[S_n] = 2\mathbb{E}\left[\tilde{S}_n\right] - n = 1.1n - n = 0.1n$$
and

(b)
$$\sigma^2_{S_n} = 4\sigma^2_{\tilde{S}_n} = 4 \times 0.55 \times 0.45n = 0.99n,$$
by the linearity properties of expectations and variance, and using the known values for a binomial distribution.

Alternative solution to (a) and (b): One could easily calculate the expectation $\mathbb{E}[X_i] = 0.55 - 0.45 = 0.1$ and the variance $\sigma^2_{X_i} = \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - \mathbb{E}[X_i]^2 = 1 - 0.1^2 = 0.99$ of X_i to directly use the linearity properties of the expectation and (due to independence) the summation rule of the variance to get the results of (a) and (b) much quicker (without explicitly deriving the distribution of S_n):

$$\mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = n\mathbb{E}[X_i] = 0.1n$$

$$\sigma^2_{S_n} = \sum_{i=1}^n \sigma^2_{X_i} = n\sigma^2_{X_i} = 0.99n.$$

(c) Since the X_n are i.i.d., we can find a good Gaussian approximation to this probability by the central limit theorem. Since we calculated the expectation and variance before, for large n,

$$S_n^* := \frac{S_n - 0.1n}{\sqrt{0.99n}} \overset{\text{approx}}{\sim} \mathcal{N}(0,1),$$

and in particular

$$S_{10{,}000}^* = \frac{S_{10{,}000} - 1{,}000}{\sqrt{9{,}900}} \overset{\text{approx}}{\sim} \mathcal{N}(0,1).$$

Therefore we obtain

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[800 \le S_{10{,}000} \le 1{,}100\right] &= \mathbb{P}\left[-\frac{200}{\sqrt{9{,}900}} \le \frac{S_n - 1{,}000}{\sqrt{9{,}900}} \le \frac{100}{\sqrt{9{,}900}}\right] \\ &\approx \Phi\left(\frac{100}{\sqrt{9{,}900}}\right) - \Phi\left(-\frac{200}{\sqrt{9{,}900}}\right) \\ &\approx 0.82.\end{aligned}$$

Aufgabe 10.2 Suppose that $X_1, \ldots, X_n$ form a random sample from a Poisson distribution for which the mean λ is unknown. Determine the maximum likelihood estimator for λ.

Lösung 10.2 Given the parameter λ, the probability weight function of the Poisson distribution is

$$\mathbb{P}_\lambda[X_i = k|\lambda] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Hence the MLE is the value λ which maximizes, for $x_i = X_i$,

$$L_x(\lambda) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_\lambda[X_i = x_i|\lambda] = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{(e^{-\lambda}\lambda^{\bar{x}_n})^n}{x_1! \ldots x_n!},$$

where $\bar{x}_n := (x_1 + \cdots + x_n)/n$. We need to find the λ which maximizes $L_x(\lambda) = \frac{(g(\lambda))^n}{x_1!\ldots x_n!}$, with

$$g(\lambda) := e^{-\lambda}\lambda^{\bar{x}_n}.$$

As $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto L_x(\lambda) = \frac{y^n}{x_1!\ldots x_n!}$ is a strictly monotonously increasing function, maximizing $L_x(\lambda) = h(g(\lambda))$ is equivalent to maximizing $g(\lambda)$.[1] Thus, we want to maximize

$$g(\lambda) = e^{-\lambda}\lambda^{\bar{x}_n} = \exp(-\lambda + \bar{x}_n \log \lambda).$$

So we compute

$$g'(\lambda) = (-1 + \bar{x}_n/\lambda)g(\lambda)$$

and set this to 0. The maximum of g is reached when $\lambda = \bar{x}_n$. Thus for the sample $X_1, \ldots, X_n$, the MLE for λ is $\bar{X}_n$, i.e. $\hat{\lambda}(x_1, \ldots, x_n) = \bar{x}_n = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$.

Aufgabe 10.3 In einer Nagelfabrik will man die Länge der produzierten Nägel möglichst genau schätzen. Man nimmt an, dass die Längen der Nägel $X_i, i = 1, ..., n$, unabhängig und approximativ normalverteilt sind mit Varianz 1 mm^2 und unbekanntem Erwartungswert m mm. Wieviele Nägel muss man mindestens messen, damit das zweiseitige 95%-Konfidenzintervall für m höchstens Länge 0.5 mm hat?

[1] Note that $\max_{\lambda\in\mathbb{R}_{>0}} h(g(\lambda)) \neq \max_{\lambda\in\mathbb{R}_{>0}} g(\lambda)$, but $\arg\max_{\lambda\in\mathbb{R}_{>0}} h(g(\lambda)) = \arg\max_{\lambda\in\mathbb{R}_{>0}} g(\lambda)$, where the $\arg\max$ is defined as:

$$\arg\max_{s\in S} F(s) := \left\{ s \in S : F(s) = \max_{\tilde{s}\in S} F(\tilde{s}) \right\} = \{ s \in S : \forall \tilde{s} \in S : F(s) \ge F(\tilde{s}) \}. \tag{arg max}$$

In other words: (λ^* maximizes $h(g(\lambda))$) $\iff$ (λ^* maximizes $g(\lambda)$), since h is strictly monotonously increasing.

Lösung 10.3 Mit den gemessenen Nägellängen X_i haben wir für das Konfidenzintervall[2] die Grenzen

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ \pm \ \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\Phi^{-1}\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big), \tag{1}$$

wobei Φ^{-1} die Inverse Funktion von Φ ist, i.e. $\Phi^{-1}(\Phi(z)) = z \ \forall z \in \mathbb{R}$ und $\Phi\left(\Phi^{-1}(p)\right) = p \ \forall p \in (0,1)$. Falls du (1) nicht auswendig weisst oder falls du interessiert bist, wie man (1) herleitet, leiten wir (1) Schritt für Schritt her (wobei wir die Notation $\sigma = 1$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$ und $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ verwenden):

1.) Wir suchen ein Intervall $[a(X), b(X)]$, sodass $\mathbb{P}[a(X) \le m \le b(X)] \ge 1-\alpha$. Wegen der Symmetrie der Normalverteilung können wir annehmen, dass dieses Intervall die symmetrische Form $[\bar{X}_n - c, \bar{X}_n + c]$ hat.[3] Somit müssen wir nur noch c bestimmen sodass $\mathbb{P}\left[m \in [\bar{X}_n - c, \bar{X}_n + c]\right] = 1-\alpha$.

2.) Aufgrund der "Properties of normal random variables" auf Seite 50 des Skripts erhalten wir $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2/n)$ und somit $Z := \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

3.) $\mathbb{P}\left[\bar{X}_n - c \le m\right] = \mathbb{P}\left[\bar{X}_n \le m + c\right] = \mathbb{P}\left[\bar{X}_n - m \le c\right] = \mathbb{P}\left[\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)}{\sigma} \le \frac{\sqrt{n}c}{\sigma}\right] = \mathbb{P}\left[Z \le \frac{\sqrt{n}c}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}c}{\sigma}\right)$ und somit $\mathbb{P}\left[\bar{X}_n - c > m\right] = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}c}{\sigma}\right)$. Analog erhält man $\mathbb{P}\left[\bar{X}_n + c \ge m\right] = \mathbb{P}\left[\bar{X}_n \ge m - c\right] = \mathbb{P}\left[\bar{X}_n - m \ge -c\right] = \mathbb{P}\left[\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)}{\sigma} \ge \frac{-\sqrt{n}c}{\sigma}\right] = \mathbb{P}\left[Z \ge \frac{-\sqrt{n}c}{\sigma}\right] = 1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}c}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}c}{\sigma}\right)$, wobei die letzten beiden Schritte wegen Stetigkeit beziehungsweise Symmetrie gelten. Somit gilt $\mathbb{P}\left[\bar{X}_n + c < m\right] = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}c}{\sigma}\right)$.

4.) $\mathbb{P}\left[m \in [\bar{X}_n - c, \bar{X}_n + c]\right] = 1 - \alpha$ ist äquivalent zu $\alpha = \mathbb{P}\left[m \notin [\bar{X}_n - c, \bar{X}_n + c]\right]$. Da die Ereignisse $\left\{\bar{X}_n - c > m\right\}$ und $\left\{\bar{X}_n + c < m\right\}$ disjunkt sind können wir die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung als Summe der Wahrscheinlichkeiten schreiben: $\alpha = \mathbb{P}\left[\left\{\bar{X}_n - c > m\right\} \cup \left\{\bar{X}_n + c < m\right\}\right] = \mathbb{P}\left[\bar{X}_n - c > m\right] + \mathbb{P}\left[\bar{X}_n + c < m\right] = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}c}{\sigma}\right)\right)$. Diese Gleichung ist äquivalent zu $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}c}{\sigma}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. Durch Anwendung von Φ^{-1} auf beiden Seiten erhalten wir $\frac{\sqrt{n}c}{\sigma} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ und somit $c = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ woraus dann direkt (1) folgt.

Aus (1) erhält man für die Länge des Vertrauensintervalls $C(\mathbf{X})$

$$|C(\mathbf{X})| = \frac{2\Phi^{-1}\Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big)}{\sqrt{n}}$$

und möchte $|C(\mathbf{X}| \le 0.5$ haben, also $\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sigma \le 0.5\sqrt{n}$. Nach n aufgelöst und für $\alpha = 0.05$, $\sigma^2 = 1$ eingesetzt gibt das $n \ge \left(4\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sigma\right)^2 = 16\left(\Phi^{-1}(0.975)\right)^2 = 16 \times (1.96)^2 = 61.47$. Also muss man mindestens 62 Nägel messen.

Wenn du Feedback zum Übungszettel hast, schreibe bitte eine Mail an Jakob Heiss.

[2] Das Konfidenzintervall (engl. confidence interval) wird auch Vertrauensintervall, Vertrauensbereich oder Erwartungsbereich genannt.

[3] An dieser Stelle könnte man noch annehmen, dass $c = c(X)$ von X abhängen könnte, später wird man aber sehen, dass im Fall der Normalverteilung mit bekannter Varianz, c unabhängig von X gewählt werden kann. Wenn man nicht an das Symmetrie-Argument glauben würde, künnte man auch mit $[\bar{X}_n - c_1, \bar{X}_n + c_2]$ rechnen und dann über ein optimierungsproblem herausfinden, dass man das kürzest mögliche Konfidenzintervall erhällt wenn $c_1 = c_2$.

Tabelle der Standardnormalverteilung

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Zum Beispiel ist $\mathbb{P}[Z \leq 1.96] = 0.975$.