Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Lösungen Serie 3

Version 2 (7. März 2022: Zusätzliche Erklärungen zur Lösung von Aufgabe 3.1(a)); Version 1 (3. März)

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum des Moodle-Kurs (und/oder (anonym) in diesem file `https://docs.google.com/document/d/1CfTkwrNOhTKB8y8cVQW_deUahCejTbQWlm_BzrHIFYA/edit?usp=sharing`)

Wir empfehlen die Aufgaben selbständig zu lösen und dann im Fach der entsprechenden Übungsgruppe im Raum HG G 53 abzugeben oder selbst mit dieser Lösung zu vergleichen am besten rechtzeitig vor der Übung am **14. März**.

Aufgabe 3.1

(a) Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum korrespondierend zum zweifachen Würfelwurf. Genauer gesagt statten wir die Menge $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$ mit der Menge der Ereignisse $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und der Laplace-Wahrscheinlichkeitsmass $\mathbb{P}$ aus. Betrachten Sie die Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$X(\omega) = |\omega_1 - \omega_2|.$$

- Erklären Sie, wieso X eine Zufallsvariable ist.
- Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X.

(b) Betrachten Sie nun das Modell der Gleichverteilung auf $\Omega = [0,1]^2$ mit $\mathcal{F}$ die *Borel-σ-Algebra* auf $[0,1]$.[1] Wir definieren die Abbildung $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, definiert durch durch:

$$Y(\omega) = 2\omega_1 + 2\omega_2.$$

(mit der Notation aus der Vorlesung entspricht das dem Umfang des Rechtecks $R(\omega)$.

- Zeige, dass Y eine Zufallsvariable ist.
- Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_Y von Y.

Lösung 3.1

(a) Wir begründen zunächst, dass X tatsächlich eine Zufallsvariable ist. Hierzu müssen wir nachweisen, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}.$$

Da aber $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ gilt, ist dies immer erfüllt, also ist X tatsächlich eine Zufallsvariable.

Als Nächstes berechnen wir die Verteilungsfunktion F_X von X: Offensichtlich ist für $x < 0$

$$F_X(x) = \mathbb{P}\left[\{\omega \in \Omega : X(\omega) = |\omega_1 - \omega_2| < x\}\right] = 0,$$

da $|u| \geq 0$ für jede reelle Zahl u gilt.

Sei nun $x \geq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}\left[\{\omega \in \Omega : X(\omega) = |\omega_1 - \omega_2| \leq x\}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| \leq \lfloor x \rfloor\}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}\left[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = n\}\right] \end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $|\omega_1 - \omega_2|$ für $\omega \in \Omega$ nur ganzzahlige Werte annehmen kann, sowie die Notation

$$\lfloor x \rfloor := \max\{\ell \in \mathbb{Z} : \ell \leq x\}$$

[1] Diese ist definiert als die kleinste Menge von Teilmengen von Ω, die H1 – H3 aus Definition 1.2 des Skripts erfüllt **und** alle Mengen $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$, $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1$ enthält.

für die Abrundungsfunktion. Jetzt berechnen wir:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = 0\}] = \mathbb{P}[\{(1,1), ..., (6,6)\}] = \frac{6}{36}\\
&\mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = 1\}] = \mathbb{P}[\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2), ..., (5,6),(6,5)\}] = \frac{10}{36}\\
&\mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = 2\}] = \mathbb{P}[\{(1,3),(3,1),(2,4),(4,2), ..., (4,6),(6,4)\}] = \frac{8}{36}\\
&\mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = 3\}] = \mathbb{P}[\{(1,4),(4,1),(2,5),(5,2),(3,6),(6,3)\}] = \frac{6}{36}\\
&\mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = 4\}] = \mathbb{P}[\{(1,5),(5,1),(2,6),(6,2)\}] = \frac{4}{36}\\
&\mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = 5\}] = \mathbb{P}[\{(1,6),(6,1)\}] = \frac{2}{36}
\end{aligned}$$

Damit können wir nun die Verteilungsfunktion explizit bestimmen:

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \le x] = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{6}{36}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{6}{36} + \frac{10}{36}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36}, & 2 \le x < 3 \\ \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} + \frac{6}{36}, & 3 \le x < 4 \\ \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36}, & 4 \le x < 5 \\ 1, & x \ge 5 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{6}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{4}{9}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{2}{3}, & 2 \le x < 3 \\ \frac{5}{6}, & 3 \le x < 4 \\ \frac{17}{18}, & 4 \le x < 5 \\ 1, & x \ge 5 \end{cases}$$

Zum besseren Verständnis, kann man beispielsweise nachrechnen, dass $\mathbb{P}[X = 4] = F_X(4) - F_X(4-) = (\frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36}) - (\frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} + \frac{6}{36}) = \frac{4}{36}$, falls man sich noch unsicher mit Verteilungsfunktionen F_X ist.

(b) Wir beweisen zunächst wieder, dass Y eine Zufallsvariable ist. Dazu müssen wir wieder überprüfen, dass $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \le a\} \in \mathcal{F},$$

wobei $\mathcal{F}$ die Borel-σ-Algebra auf $\Omega = [0,1]^2$ ist. Zunächst sehen wir, dass für $a < 0$ gilt:

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \le a\} = \{\omega \in [0,1]^2 : 2\omega_1 + 2\omega_2 \le a\} = \varnothing \in \mathcal{F}$$

da jede σ-Algebra die leere Menge enthält (Proposition 1.5, i). Analog ist auch für $a \ge 4$:

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \le a\} = \{\omega \in [0,1]^2 : 2\omega_1 + 2\omega_2 \le a\} = \Omega \in \mathcal{F}$$

Sei also $a \in [0,4)$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
\{\omega \in \Omega : Y(\omega) > a\} &= \{\omega \in [0,1]^2 : 2\omega_1 + 2\omega_2 > a\} \\
&= \{\omega \in [0,1]^2 : 0 \le \omega_1 \le 1, \tfrac{a}{2} - \omega_1 < \omega_2 \le 1, \omega_2 \ge 0\} \\
&\overset{(*)}{=} \left(\bigcup_{x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} [x,1] \times (\tfrac{a}{2} - x, 1] \right) \cap \mathbb{R} \times [0,\infty) \\
&= \bigcup_{x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{[x,1] \times [\max\{\tfrac{a}{2} - x + \tfrac{1}{n}, 0\}, 1]}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F},
\end{aligned}$$

denn $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ist abzählbar und abzählbare Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{F}$ liegen wieder in $\mathcal{F}$ (Definition 1.2, H3).

In $(*)$ haben wir verwendet, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, das bedeutet, falls für $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ gilt, dass $0 \le \omega_1 \le 1$ und $\frac{a}{2} - \omega_1 < \omega_2 \le 1$, dann finden wir ein $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ sodass:

$$\omega_1 \ge x, \qquad \omega_2 > \frac{a}{2} - x.$$

In der Tat finden wir so ein x, indem wir eine Folge $x_n \uparrow \omega_1$ wählen mit $x_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ und bemerken, dass wegen $\omega_2 > \frac{a}{2} - \omega_1$ auch gilt, dass $\omega_2 > \frac{a}{2} - x_n$ für $n \geq N$ und wir können $x := x_N$ setzen.
Da aber $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra ist, liegt mit $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) > a\}$ auch $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq a\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) > a\}^c \in \mathcal{F}$.
Wir berechnen nun die Verteilungsfunktion F_Y von Y. Wie wir bereits oben gesehen haben, gilt:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\left[\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}\right] = \mathbb{P}\left[\varnothing\right] = 0, \qquad y < 0$$

sowie

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\left[\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}\right] = \mathbb{P}\left[\Omega\right] = 1, \qquad y \geq 4.$$

Sei zunächst $y \in [0,2)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}\left[\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\{\omega \in \Omega : 2\omega_1 + 2\omega_2 \leq y\}\right] \\ &= \text{Area}(\{\omega \in \Omega : 2\omega_1 + 2\omega_2 \leq y\}) \end{aligned}$$

Man erkennt leicht, dass diese Fläche gerade das (abgeschlossene) Dreieck begrenzt durch die Punkte $(0,0), (0, \frac{y}{2})$ und $(\frac{y}{2}, 0)$ ist, welches eine Fläche von $\frac{y^2}{8}$ besitzt (in der Tat, $2\omega_1 + 2\omega_2 \leq y \Leftrightarrow (\omega_1 \in [0, \frac{y}{2}]$ und $\omega_2 \in [0, \frac{y}{2} - \omega_1])$).
Für $y \in [2,4)$ berechnen wir stattdessen

$$\begin{aligned} 1 - F_Y(y) &= \mathbb{P}\left[\{\omega \in \Omega : Y(\omega) > y\}\right] \\ &= \text{Area}(\{\omega \in \Omega : 2\omega_1 + 2\omega_2 > y\}) = \tfrac{1}{2}(2 - \tfrac{y}{2})^2, \end{aligned}$$

da die Fläche hier gegeben ist als das (offene) Dreieck begrenzt durch die Punkte $(1,1), (\frac{y}{2} - 1, 1)$ und $(1, \frac{y}{2} - 1)$. Damit gilt $F_Y(y) = 1 - \frac{1}{2}(2 - \frac{y}{2})^2 = y - \frac{y^2}{8} - 1$. Damit erhalten wir schliesslich die Verteilungsfunktion:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{y^2}{8}, & 0 \leq y < 2 \\ y - \frac{y^2}{8} - 1, & 2 \leq y < 4 \\ 1, & y \geq 4. \end{cases}$$

Aufgabe 3.2 Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion

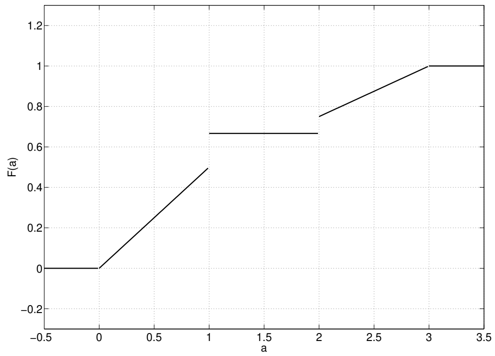
$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{falls } a < 0 \\ a/2 & \text{falls } 0 \leq a < 1 \\ 2/3 & \text{falls } 1 \leq a < 2 \\ (a+1)/4 & \text{falls } 2 \leq a < 3 \\ 1 & \text{falls } 3 \leq a \end{cases}$$

(a) Zeichne diese Verteilungsfunktion.

(b) Bestimme folgende Wahrscheinlichkeiten: $\mathbb{P}\left[\{X < 1\}\right]$, $\mathbb{P}\left[\{X = 2\}\right]$, $\mathbb{P}\left[\{X = 3\}\right]$, $\mathbb{P}\left[\{1 < X \leq 2\}\right]$, $\mathbb{P}\left[\{1 \leq X < 2\}\right]$ und $\mathbb{P}\left[\{X \geq 3/2\}\right]$.

Lösung 3.2

(a) Der Graph von F verläuft folgendermassen:



(b) $\mathbb{P}[\{X<1\}] = F(1^-) = 1/2$
$\mathbb{P}[\{X=2\}] = F(2) - F(2^-) = 3/4 - 2/3 = 1/12$
$\mathbb{P}[\{X=3\}] = 0$ (da F stetig im Punkt 3)
$\mathbb{P}[\{1<X\leq 2\}] = F(2) - F(1) = 3/4 - 2/3 = 1/12$
$\mathbb{P}[\{1\leq X<2\}] = F(2^-) - F(1^-) = 2/3 - 1/2 = 1/6$
$\mathbb{P}[\{X\geq 3/2\}] = 1 - F(1.5^-) = 1 - 2/3 = 1/3.$

Aufgabe 3.3 Fünf faire Münzen werden nacheinander geworfen. Sei X die Zufallsvariable, welche die totale Anzahl erschienenen “Köpfe ” zählt. Am Anfang setzen Sie 1 Franken Einsatz, wobei sie bei jedem Münzwurf 10% Ihres Einsatzes gewinnen, falls “Kopf” erscheint, und verlieren 10% ihres Einsatzes, falls “Zahl” erscheint. Vor jedem Münzwurf setzen Sie Ihren gesamten Wetteinsatz. Wir bezeichnen mit Y Ihren totalen Geldbetrag nach den fünf Münzwürfen.

(a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von Y.
Hinweis: Finden Sie f, so dass $Y = f(X)$.

Lösung 3.3

(a) Da es sich um eine faire Münze handelt, verwenden wir ein Laplace Modell mit $\Omega = \{\text{“Kopf”}, \text{“Zahl”}\}^5$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und alle Elementarereignisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit $1/2^5 = 1/32$. Wir berechnen $\mathbb{P}[X=i]$, für $i = 0, \dots, 5$. Da wir ein Laplace Modell voraussetzen, müssen wir alle Elementarereignisse zählen, bei denen genau i-mal “Kopf” erscheint. Wir erhalten $\binom{5}{i}$ und somit $\mathbb{P}[X=i] = \binom{5}{i}/32$. Als Verteilungsfunktion erhalten wir

$$F_X(x) = \sum_{i\leq x;\, 0\leq i\leq 5} \frac{\binom{5}{i}}{32} = \begin{cases} 0 & \text{falls } x<0, \\ 1/32 & \text{falls } 0\leq x<1, \\ 3/16 & \text{falls } 1\leq x<2, \\ 1/2 & \text{falls } 2\leq x<3, \\ 13/16 & \text{falls } 3\leq x<4, \\ 31/32 & \text{falls } 4\leq x<5, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Wir bemerken, dass der totale Geldbetrag Y nach dem Spiel nur von der Anzahl erschienenen “Köpfe” abhängt. Es gilt nämlich $Y = f(X) = (1.1)^X \times (0.9)^{5-X}$. Da f wachsend ist, erhalten wir folgende Verteilungsfunktion von Y:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } y<0.9^5, \\ 1/32 & \text{falls } 0.9^5\leq y<1.1\times 0.9^4, \\ 3/16 & \text{falls } 1.1\times 0.9^4\leq y<1.1^2\times 0.9^3, \\ 1/2 & \text{falls } 1.1^2\times 0.9^3\leq y<1.1^3\times 0.9^2, \\ 13/16 & \text{falls } 1.1^3\times 0.9^2\leq y<1.1^4\times 0.9^1, \\ 31/32 & \text{falls } 1.1^4\times 0.9^1\leq y<1.1^5, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn du Feedback zum Übungszettel hast, schreibe bitte eine Mail an Jakob Heiss.