Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Lösungen Serie 5

Version 1.1 (15. Mai 2022: Schönere Anführungszeichen in Aufgabe 5.4 verwendet auf Wunsch von jemandem im Google-Doc); Version 1 (18. März)

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum des Moodle-Kurs (und/oder (anonym) in diesem file https://docs.google.com/document/d/1CfTkwrNOhTKB8y8cVQW_deUahCejTbQWlm_BzrHIFYA/edit?usp=sharing)

Vergiss nicht am 28. März pünktlich um spätestens 13:15 in deine Übungsgruppe zur Lernkontrolle zu kommen (im gleichen Raum wo auch sonst immer die Übungsgruppen statt finden, beziehungsweise in LFW C4 für Gruppe 6).

Wir empfehlen die Aufgaben selbständig zu lösen und dann im Fach der entsprechenden Übungsgruppe im Raum HG G 53 abzugeben oder selbst mit dieser Lösung zu vergleichen am besten rechtzeitig vor der Übung am **04. April**.

Aufgabe 5.1 Zwei Würfel werden unabhängig voneinander geworfen. Wir modellieren dies mit einem Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wobei

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2.$$

Seien X und Y Zufallsvariablen definiert durch $X(\omega) = \omega_1$ und $Y(\omega) = \omega_2$ (X und Y repräsentieren jeweils den Wert des ersten und zweiten Würfels). Betrachten Sie die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \{X \in 2\mathbb{Z}\}, \\ B &= \{1 + Y \in 2\mathbb{Z}\}, \\ C &= \{X + Y \leq 3\}, \\ D &= \{X \leq 2, Y \leq 2\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) A und B sind unabhängig,

(b) A und C sind **nicht** unabhängig,

(c) A und D sind unabhängig,

(d) A, B, D sind paarweise unabhängig. Sind sie unabhängig?

Lösung 5.1 Wir geben zunächst die Ereignisse A, B, C, D in aufzählender Form an:

$$\begin{aligned} A &= \{X \in 2\mathbb{Z}\} = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \{2,4,6\}\} = \{2,4,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \\ &= \{(2,1),(2,2),...,(2,6),(4,1),(4,2),...,(4,6),(6,1),(6,2),...,(6,6)\} \\ B &= \{1 + Y \in 2\mathbb{Z}\} = \{(\omega_1, \omega_2) : 1 + \omega_2 \in \{2,4,6\}\} = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,3,5\} \\ &= \{(1,1),(2,1),...,(6,1),(1,3),(2,3),...,(6,3),(1,5),(2,5),...,(6,5)\} \\ C &= \{X + Y \leq 3\} = \{(1,1),(1,2),(2,1)\} \\ D &= \{X \leq 2,\ Y \leq 2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\} \end{aligned}$$

(a) Wir müssen nachweisen, dass $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$ gilt. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A] &= \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|\{2,4,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^2|} = \frac{3 \cdot 6}{6^2} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}[B] &= \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{|\{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,3,5\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^2|} = \frac{3 \cdot 6}{6^2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

andererseits gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A\cap B] &= \frac{|A\cap B|}{|\Omega|}\\ &= \frac{|\{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5),(6,1),(6,3),(6,5)\}|}{6^2}\\ &= \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B].\end{aligned}$$

Damit sind A und B unabhängig.

(b) Es gilt:

$$\mathbb{P}[C] = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{|\{(1,1),(1,2),(2,1)\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^2|} = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12},$$

andererseits haben wir

$$\mathbb{P}[A\cap C] = \frac{|A\cap C|}{|\Omega|} = \frac{|\{(2,1)\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^2|} = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[C]$$

Damit sind A und C nicht unabhängig.

(c) Analog zu Teil (b) rechnen wir:

$$\mathbb{P}[D] = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{|\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^2|} = \frac{4}{6^2} = \frac{1}{9},$$

andererseits haben wir

$$\mathbb{P}[A\cap D] = \frac{|A\cap D|}{|\Omega|} = \frac{|\{(2,1),(2,2)\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^2|} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[D].$$

(d) Für die paarweise Unabhängigkeit von A, B und D ist nachzuweisen:

- $\mathbb{P}[A\cap B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B] \rightsquigarrow$ siehe (a)
- $\mathbb{P}[A\cap D] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[D] \rightsquigarrow$ siehe (c)
- $\mathbb{P}[B\cap D] = \frac{|\{(1,1),(2,1)\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^2|} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}\cdot = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} = \mathbb{P}[B]\,\mathbb{P}[D]$

A, B, D sind unabhängig, denn es gilt

$$\mathbb{P}[A\cap B\cap D] = \frac{|\{(2,1)\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{36},$$

was auch $\mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]\,\mathbb{P}[D]$ entspricht.

Aufgabe 5.2 Wir betrachten den Wurf eines fairen Tetraeders, markiert mit den Zahlen 1 bis 4. Wir modellieren dies wiederum mit einem Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, wobei

$$\Omega = \{1,2,3,4\},$$

wobei jedes $\omega\in\Omega$ gleichwahrscheinlich ist.

Zeigen Sie, dass die Ereignisse

$$\begin{aligned}A &= \{1,2\},\\ B &= \{1,3\},\\ C &= \{1,4\}.\end{aligned}$$

paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig sind.

Lösung 5.2 Wir weisen zunächst die paarweise Unabhängigkeit nach:

Beachte, dass $|A| = |B| = |C| = 2$, damit ist $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[C] = \frac{2}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A \cap B] &= \frac{|\{1\}|}{|\{1,2,3,4\}|} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B] \\
\mathbb{P}[A \cap C] &= \frac{|\{1\}|}{|\{1,2,3,4\}|} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[C] \\
\mathbb{P}[B \cap C] &= \frac{|\{1\}|}{|\{1,2,3,4\}|} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}[B]\,\mathbb{P}[C]
\end{aligned}$$

Damit sind A, B, C paarweise unabhängig. Allerdings gilt:

$$\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \frac{|\{1\}|}{|\{1,2,3,4\}|} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]\,\mathbb{P}[C]\,,$$

damit sind A, B, C nicht unabhängig.

Aufgabe 5.3 Seien A, B und $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ Ereignisse in einer σ-Algebra $\mathcal{F}$. Nehme an, dass die A_i paarweise disjunkt sind.

(a) Zeige, dass A und B unabhängig sind genau dann, wenn A^c und B^c unabhängig sind.

(b) Zeige, falls für alle $i = 1, \dots, n$, A and A_i paarweise unabhängig sind, dass dann A und $\bigcup_{i=1}^n A_i$ unabhängig sind.

(c) Nehme an, dass $\mathbb{P}(A) = 1$ ist. Zeige, dass für alle $B \in \mathcal{F}$, A and B unabhängig sind.

Lösung 5.3

(a) Zuerst beobachten wir, dass

$$A, B \text{ sind unabhängig} \Leftrightarrow A, B^c \text{ sind unabhängig},$$

denn benutzen wir diese Äquivalenz mit A und B^c, erhalten wir, dass B^c, A unabhängig sind und auch B^c, A^c unabhängig sind. Des weiteren, da $(B^c)^c = B$, reicht es zu zeigen, dass wenn A, B unabhängig sind, dass dann auch A, B^c unabhängig sind. Wir nehmen an, dass

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

und wollen zeigen, dass das

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$$

impliziert.
Es gilt $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, und folglich $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = A \cap (B \cap B^c) = A \cap \varnothing = \varnothing$, woraus wir

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$$

schliessen.
Daraus folgern wir

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c).$$

(b) Nach Annahme haben wir $\mathbb{P}(A \cap A_i) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_i)$, $i = 1, \dots, n$. Da die Ereignisse A_i paarweise disjunkt sind, so sind es auch $A \cap A_i$. Folglich haben wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n (A \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_i) \\
&= \mathbb{P}(A) \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right), \text{was zu beweisen war.}
\end{aligned}$$

(c) Mit (a) können wir zeigen, dass es ausreicht die Aussage für A^c zu zeigen, wobei $\mathbb{P}(A^c) = 0$. Für alle Ereignisse $B \in \mathcal{F}$, da $A^c \cap B \subseteq A^c$, bekommen wir mit Hilfe der Monotonie $\mathbb{P}(A^c \cap B) = 0$. Folglich ist $\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)$ erfüllt für jedes $B \in \mathcal{F}$. Aus der Unabhängigkeit von A^c und B folgt mit (a), dass A und B unabhängig sind.

Aufgabe 5.4 Wir betrachten ein Kartenblatt mit den üblichen 52 Karten und 4 Farben (Herz, Kreuz, Karo und Pik). Sind die folgenden Ereignisse unabängig?

(a) Wir ziehen eine Karte und betrachten die Ereignisse $A =$ "Du hast einen König gezogen" und $B =$ "Du hast eine Pik-Karte gezogen".

(b) Wir ziehen zwei Karten **mit Zurücklegen** und betrachten die Ereignisse $A =$ "Du ziehst ein Paar" und $B =$ "Du hast zwei Herzkarten gezogen". Nehme an, dass die Reihenfolge der Verteilten Karten eine Rolle spielt.

(c) Wir ziehen zwei Karten **ohne Zurücklegen** und betrachten die Ereignisse $A =$ "Du ziehst ein Paar" und $B =$ "Du ziehst zwei Kreuz-Karten". Nehme an, dass die Reihenfolge der Karten keine Rolle spielt.

Lösung 5.4 Wir betrachten hier nur Laplace Modelle. Folglich ist

$$|A \cap B| = \frac{|A||B|}{|\Omega|}$$

äquivalent zu

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Sei K die Menge der 52 Karten ($|K| = 52$).

(a) Wir wählen ein Laplace-Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ auf $\Omega = K$. Das bedeutet $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{P}(K)$ und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1], E \mapsto \mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{|E|}{|K|}$. Zieht man nur eine Karte, dann gilt:

- $|\Omega| = 52$, da das Blatt 52 Karten enthält,
- $|A| = 4$, da das Blatt 4 Könige enthält,
- $|B| = 13$, da das Blatt 13 Pik-Karten enthält, und
- $|A \cap B| = 1$, da es nur einen Pik-König gibt.

Es folgt

$$\frac{|A||B|}{|\Omega|} = \frac{4 \times 13}{52} = 1 = |A \cap B|.$$

Also sind A und B unabhängig.

(b) Wir wählen ein Laplace-Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ auf $\Omega = K^2 = K \times K$. Das bedeutet $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{P}\left(K^2\right)$ und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1], E \mapsto \mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{|E|}{|K^2|}$. Äquivalent, gilt beim Ziehen von zwei Karten:

- $|\Omega| = 52^2 = 2'704$,
- $|A| = 13 \times 4^2 = 208$, da das Paar aus allen der 13 verschieden Karten gebildet werden kann,
- $|B| = 13^2 = 169$, das es 13 Herzkarten gibt, und
- $|A \cap B| = 13 \times 1^2$, da du zweimal die selbe Herz-Karte ziehen musst (von 13 möglichen).

Wir erhalten

$$\frac{|A||B|}{|\Omega|} = \frac{208 \times 169}{2'704} = 13 = |A \cap B|.$$

Folglich sind A und B unabhängig.

(c) Wir wählen ein Laplace-Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ auf $\Omega = \{H \in \mathcal{P}(K) : |H| = 2\} = \{H \subset K : |H| = 2\}$. Das bedeutet $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1], E \mapsto \mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$. Wir haben:

- $|\Omega| = \binom{52}{2} = 1'326$,
- $|A| = 13 \times \binom{4}{2} = 78$, da das Paar aus allen 13 Karten gebildet werden kann,
- $|B| = \binom{13}{2} = 78$, da es 13 verschiedene Kreuz-Karten gibt, und

- $|A \cap B| = 0$, da ohne Zurücklegen die selbe Karte nicht gezogen werden kann.

Wir beobachten
$$\frac{|A||B|}{|\Omega|} = \frac{78 \times 78}{1'326} \approx 4.6 \neq 0 = |A \cap B|.$$
Folglich sind A und B *nicht* unabhängig.

Aufgabe 5.5 Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $A \in \mathcal{F}$. Betrachten Sie die **Indikatorfunktion** $\mathbb{1}_A$ von A, definiert durch
$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{if } \omega \notin A, \\ 1 & \text{if } \omega \in A. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{1}_A$ eine Zufallsvariable ist.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $\mathbb{1}_A$

(c) Sei $B \in \mathcal{F}$ ein anderes Ereignis. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (i) A und B sind unabhängig,

  (ii) Die Zufallsvariablen $\mathbb{1}_A$ und $\mathbb{1}_B$ sind unabhängig.

Lösung 5.5

(a) Wir bemerken, dass wegen der Definition von $\mathbb{1}_A$ gilt:
$$\{\mathbb{1}_A \le a\} = \{\omega \in \Omega : \mathbb{1}_A(\omega) \le a\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{falls } a < 0, \\ A^c, & \text{falls } 0 \le a < 1, \\ \Omega, & \text{falls } a \ge 1, \end{cases}$$
für alle $a \in \mathbb{R}$. Das bedeutet, dass $\mathbb{1}_A$ eine Zufallsvariable ist.

(b) Sei nun $a \in \mathbb{R}$. Die Verteilungsfunktion von $\mathbb{1}_A$ ist
$$F_{\mathbb{1}_A}(a) = \mathbb{P}[\{\mathbb{1}_A \le a\}] \overset{\text{(a)}}{=} \begin{cases} \mathbb{P}[\varnothing], & \text{falls } a < 0 \\ \mathbb{P}[A^c], & \text{falls } 0 \le a < 1 \\ \mathbb{P}[\Omega], & \text{falls } a \ge 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 0 \\ 1 - \mathbb{P}[A], & \text{falls } 0 \le a < 1 \\ 1, & \text{falls } a \ge 1 \end{cases}$$
wobei wir Proposition 1.8, *i.*, *iii.* und *P1* in Definition 1.6 verwendet haben.

(c) (i) $\Rightarrow$ (ii): Die Zufallsvariablen $\mathbb{1}_A$ und $\mathbb{1}_B$ sind unabhängig, falls für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\mathbb{P}[\mathbb{1}_A \le a, \mathbb{1}_B \le b] = \mathbb{P}[\mathbb{1}_A \le a]\,\mathbb{P}[\mathbb{1}_B \le b].$$
Wir bemerken, dass nach (a) für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\{\mathbb{1}_A \le a\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{falls } a < 0, \\ A^c, & \text{falls } 0 \le a < 1, \\ \Omega, & \text{falls } a \ge 1, \end{cases} \qquad \{\mathbb{1}_B \le b\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{falls } b < 0, \\ B^c, & \text{falls } 0 \le b < 1, \\ \Omega, & \text{falls } b \ge 1, \end{cases}$$
Damit sind $\{\mathbb{1}_A \le a\}$ und $\{\mathbb{1}_B \le b\}$ stets unabhängige Ereignisse, da gilt:

- Nach Aufgabe 5.3(a) sind A und B unabhängig, so sind auch auch A^c und B^c unabhängig.
- Nach Aufgabe 5.3(c) ist Ω (mit $\mathbb{P}[\Omega] = 1$) sowohl von A^c als auch von B^c unabhängig.
- Jedes Ereignis $C \in \mathcal{F}$ (insbesondere A^c und B^c) ist von $\varnothing$ unabhängig, denn $\mathbb{P}[\varnothing \cap C] = \mathbb{P}[\varnothing] = 0 = \mathbb{P}[\varnothing]\,\mathbb{P}[C]$.

(ii) ⇒ (i) Falls $\mathbb{1}_A$ und $\mathbb{1}_B$ unabhängig sind, so gilt:

$$\mathbb{P}[A^c \cap B^c] = \mathbb{P}[\mathbb{1}_A \le 0, \mathbb{1}_B \le 0] = \mathbb{P}[\mathbb{1}_A \le 0]\,\mathbb{P}[\mathbb{1}_B \le 0] = \mathbb{P}[A^c]\,\mathbb{P}[B^c]$$

und A^c und B^c sind unabhängig. Nach Aufgabe 5.3(a) sind auch A und B unabhängig.

Aufgabe 5.6

(a) Alice rolls a die (Würfel) and pays the square of the resulting number (quadrierte Augenzahl) to Bob in CHF.

   i) Define a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ that describes rolling the die.

   ii) Define a random variable X that describes how many CHF Bob receives, and write down its distribution (Vertailung).

   iii) Calculate the expected value $\mathbb{E}[X]$.

(b) Three people each toss a fair coin. What is the probability of someone being the "odd man out"? This means that two of the players obtain the same outcome, while the third gets a different one. Please start solving this problem by defining a suitable probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Lösung 5.6

(a) i) $\Omega := \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}[A] := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ with $p(\omega) := \frac{1}{6}\ \forall \omega \in \Omega$.

   ii) $X : \Omega \to E := \{1,4,9,16,25,36\}$, $\omega \mapsto X(\omega) := \omega^2$.
   Note: The probability distribution $(p_x)_{x\in E}$ of X is given by $p_x := \mathbb{P}[X = x] = \frac{1}{6}\ \forall x \in E$. The probability distribution (Vertailung[1]) $(p_x)_{x\in E}$ is not the same as the probability distribution function (Verteilungsfunktion[2]) F_X (but one can easily obtain one from another).

   iii) From Definition 2.26 from the lecture notes we get,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in E} x\mathbb{P}[X = x] = \sum_{x\in E} x p_x = \sum_{x\in\{1,4,9,16,25,36\}} x\frac{1}{6} = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6} \approx 15.1667.$$

(b) We take a Laplace-model with $\Omega := \{H,T\}^3$, so $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$ and $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1], A \mapsto \mathbb{P}[A] := \frac{|A|}{|\Omega|}$. Then $\mathbb{P}[\{\omega\}] = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ for all $\omega \in \Omega$, and so

$$\begin{aligned} p &:= \mathbb{P}[\text{one of the players is the "odd man out"}] \\ &= 1 - \mathbb{P}[\text{all 3 players get the same outcome}] \\ &= 1 - \mathbb{P}[\text{HHH or TTT}] \\ &= 1 - \mathbb{P}[\text{HHH}] - \mathbb{P}[\text{TTT}] \\ &= 1 - \frac{1}{8} \times 2 \\ &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Here, $\mathbb{P}[\text{HHH}] = \mathbb{P}[\text{TTT}] = \frac{1}{|\Omega|}$, where $|\Omega| = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$, the number of all possible outcomes for the 3 tosses.

Wenn du Feedback zum Übungszettel hast, schreibe bitte eine Mail an Jakob Heiss.

[1] Die Vertailung $(p_x)_{x\in E}$ wird in der Literatur häufig auch als Wahrscheinlichkeitsverteilung, (Wahrscheinlichkeits-)Gewichtsfunktion, (Wahrscheinlichkeits-)Gewicht(ung) oder als diskrete (Wahrscheinlichkeits-)Dichte (oder als Radon-Nikodým-Dichte bezüglich des Zählmasses) bezeichnet.

[2] Die Verteilungsfunktion F_X wird in der Literatur häufig auch als Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion, kumulative (Wahrscheinlichkeits-)Verteilungsfunktion, **c**umulative (probability) **d**istribution **f**unction, cdf oder CDF bezeichnet.