

# Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

## Lösungen Serie 7

Version 1 (10. April 2022)

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im [Forum](#) des Moodle-Kurs (und/oder (anonym) in diesem file [https://docs.google.com/document/d/1CfTkwrN0hTKB8y8cVQW\\_deUahCeJtTbQWlm\\_BzrHIFYA/edit?usp=sharing](https://docs.google.com/document/d/1CfTkwrN0hTKB8y8cVQW_deUahCeJtTbQWlm_BzrHIFYA/edit?usp=sharing))

Wir empfehlen die Aufgaben selbständig zu lösen und dann im Fach der entsprechenden Übungsgruppe im Raum HG G 53 abzugeben oder selbst mit dieser Lösung zu vergleichen am besten rechtzeitig vor der Übung am **11. April**.

**Aufgabe 7.1**  $k$  Jäger schiessen gleichzeitig je einmal auf einen Schwarm aus  $m$  Enten. Sie suchen sich unabhängig voneinander die Ente aus, auf die sie zielen, und treffen diese unabhängig voneinander und unabhängig von der Wahl der Ente mit Wahrscheinlichkeit  $p \in [0, 1]$ .

Führen Sie für jede Ente  $n \leq m$  eine Zufallsvariable  $X_n$  ein, die angibt, ob die Ente getroffen wurde oder nicht. D.h. es soll gelten  $\{X_n = 1\} = \{n\text{-te Ente nicht getroffen}\}$  und  $\{X_n = 0\} = \{n\text{-te Ente getroffen}\}$ .

- (a) Welche Verteilung hat  $X_n$  für  $n = 1, \dots, m$ ?
- (b) Wie gross ist die erwartete Anzahl unverletzter Enten?
- (c) Sind die Ereignisse  $\{X_n = 0\}$ ,  $n = 1, \dots, m$  unabhängig? Untersuchen Sie nur den Fall  $k < m$ .

### Lösung 7.1

- (a)  $X_n$  kann nur Werte in  $\{0, 1\}$  annehmen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die  $n$ -te Ente vom  $\ell$ -ten Jäger *nicht* getroffen wird, ist  $1 - p/m$ . Da die Jäger unabhängig voneinander schiessen, beträgt für die  $n$ -te, und deswegen für jede Ente die Chance, unverletzt davonzukommen,

$$\mathbb{P}[X_n = 1] = \left(1 - \frac{p}{m}\right)^k. \quad (1)$$

Also sind alle  $X_n$  Binomial-verteilt mit Parametern  $\tilde{n} = 1$  und  $\tilde{p} = (1 - p/m)^k$ , also Bernoulli verteilt mit Parameter  $\tilde{p}$ .

- (b) Die Gesamtzahl  $X$  aller nicht verletzten Enten ist gleich  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_m$ . Aufgrund der Linearität des Erwartungswertes gilt

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \dots + \mathbb{E}[X_m]. \quad (2)$$

Da die  $X_n$  Indikatorvariablen sind, gilt  $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{P}[X_n = 1] = (1 - p/m)^k$  für alle  $n = 1, \dots, m$  und somit

$$\mathbb{E}[X] = m \left(1 - \frac{p}{m}\right)^k.$$

- (c) Wir betrachten nur den Fall  $k < m$ , also weniger Jäger als Enten. Dann sind  $X_1, \dots, X_m$  **nicht** unabhängig, weil

$$\mathbb{P}[X_1 = \dots = X_m = 0] = 0 < \left(1 - \left(1 - \frac{p}{m}\right)^k\right)^m = \prod_{n=1}^m \mathbb{P}[X_n = 0].$$

**Bemerkung:** Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_m$  sind auch **nicht** unabhängig, wenn  $k \geq m$  und  $m > 1$ . Insbesondere ist  $X$  nicht Binomial-verteilt.

**Aufgabe 7.2** In einer Urne sind  $N$  weisse und  $M$  schwarze Kugeln. Es werden  $n \leq N + M$  Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Sei  $X$  die Anzahl gezogener weisser Kugeln.

- (a) Bestimmen Sie die Verteilung von  $X$ .

- (b) Berechnen Sie den Erwartungswert von  $X$ .  
**Hinweis:** Benützen Sie die Linearität des Erwartungswertes.

**Lösung 7.2** Sei  $X$  die Anzahl gezogener weisser Kugeln.

- (a) Für  $0 \leq k \leq N$ ,  $0 \leq n - k \leq M$  gilt

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\binom{N}{k} \binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}.$$

Für alle übrigen  $k$  ist  $\mathbb{P}[X = k] = 0$ .

- (b) Wir nummerieren die weissen Kugeln von 1 bis  $N$ . Dann können wir  $X$  als Summe von Indikatorfunktionen schreiben:

$$X = X_1 + \dots + X_N,$$

wobei

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{die weisse Kugel Nr. } i \text{ wird gezogen,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{P}[X_i = 1] = \frac{1 \cdot \binom{M+N-1}{n-1}}{\binom{M+N}{n}} = \frac{n}{M+N}.$$

Es folgt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{Nn}{M+N}.$$

**Aufgabe 7.3** Gegeben seien zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ , welche nur die Werte 0 und 1 annehmen können. Für die Verteilung von  $(X, Y)$  sollen folgende Bedingungen gelten:

$$P[X = 0] = 1/2, \quad P[Y = 0] = 1/3 \quad \text{und} \quad P[X = 0, Y = 0] = p.$$

- (a) Welche Werte darf  $p$  annehmen und für welche Werte von  $p$  sind  $X$  und  $Y$  unabhängig?  
 (b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte  $\mathbb{E}[X]$ ,  $\mathbb{E}[Y]$  und  $\mathbb{E}[XY]$  sowie die Varianzen  $\sigma_X^2$  und  $\sigma_Y^2$  als Funktion von  $p$ . Wann gilt  $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$ ?  
 (c) Finden Sie ein Beispiel von Zufallsvariablen  $U$  und  $V$  so, dass  $\mathbb{E}[UV] = \mathbb{E}[U] \mathbb{E}[V]$  aber mit  $U$  und  $V$  nicht unabhängig.

**Lösung 7.3**

- (a) Die Verteilung von  $(X, Y)$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X = 0, Y = 0] &= p, \\ \mathbb{P}[X = 0, Y = 1] &= \mathbb{P}[X = 0] - \mathbb{P}[X = 0, Y = 0] = 1/2 - p, \\ \mathbb{P}[X = 1, Y = 0] &= \mathbb{P}[Y = 0] - \mathbb{P}[X = 0, Y = 0] = 1/3 - p, \\ \mathbb{P}[X = 1, Y = 1] &= 1 - \mathbb{P}[X = 0, Y = 0] - \mathbb{P}[X = 0, Y = 1] - \mathbb{P}[X = 1, Y = 0] \\ &= 1/6 + p. \end{aligned}$$

Da die obigen Ausdrücke Wahrscheinlichkeiten sind, müssen ihre Wert zwischen 0 und 1 liegen. Folglich darf  $p$  nur Werte zwischen 0 und  $1/3$  annehmen. Andererseits, falls  $p \in [0, 1/3]$ , dann sind  $\sum_{\omega} \mathbb{P}[\{\omega\}] = 1$  und  $\mathbb{P}[\{\omega\}] \geq 0$  für alle  $\omega \in \Omega$  erfüllt.

Die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sind genau dann unabhängig, wenn für alle  $i, j = 0, 1$

$$\mathbb{P}[X = i, Y = j] = \mathbb{P}[X = i] \cdot \mathbb{P}[Y = j]$$

erfüllt ist. Also genau dann, wenn  $p = 1/6$  ist.

- (b)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 0 \cdot \mathbb{P}[X = 0] + 1 \cdot \mathbb{P}[X = 1] = 1 - 1/2 = 1/2, \\ \mathbb{E}[Y] &= 0 \cdot \mathbb{P}[Y = 0] + 1 \cdot \mathbb{P}[Y = 1] = 1 - 1/3 = 2/3, \\ \mathbb{E}[XY] &= 0 \cdot \mathbb{P}[XY = 0] + 1 \cdot \mathbb{P}[XY = 1] = \mathbb{P}[X = 1, Y = 1] = 1/6 + p. \end{aligned}$$

Da  $X$  und  $Y$  nur die Werte 0 oder 1 annehmen, gilt  $X^2 = X$  und  $Y^2 = Y$ . Somit hat man

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 1/4, \\ \sigma_Y^2 &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = 2/9.\end{aligned}$$

$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$  gilt hier genau dann, wenn  $p = 1/6$  erfüllt ist (also genau dann, wenn  $X$  und  $Y$  unabhängig sind).

- (c) Ein einfaches Beispiel ist das Folgende: Sei  $U$  eine diskrete Zufallsvariable, welche die Werte  $-1, 0, 1$  je mit Wahrscheinlichkeit  $1/3$  annimmt. Setze dann  $V := U^2$ . Intuitiv sind  $U$  und  $V$  nicht unabhängig. Formal sieht man, dass

$$\mathbb{P}[U = 1, V = 1] = \mathbb{P}[U = 1, U^2 = 1] = \mathbb{P}[U = 1] = \frac{1}{3} \neq \mathbb{P}[U = 1] \mathbb{P}[V = 1].$$

Also sind  $U$  und  $V$  effektiv nicht unabhängig. Wie man leicht zeigt, gilt jedoch  $\mathbb{E}[UV] = \mathbb{E}[U] \mathbb{E}[V]$ , denn offenbar ist  $\mathbb{E}[U^3] = \mathbb{E}[U]$  und  $\mathbb{E}[U] = 0$ .