Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 1

Abgabe am Ende der Übungsstunde oder bis Mittwoch (02.03.2022) um 10:15 Uhr

Diese Serie beschäftigt sich mit dem Begriff des Wahrscheinlichkeitraums $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und dabei insbesondere mit den Eigenschaften von σ-Algebren und Wahrscheinlichkeitsmassen. In der Perkolationsaufgabe geht es um die Besonderheit des Perkolationsparameters $p = 1/2$ und wir beantworten eine offene Frage aus der Vorlesung.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

Aufgabe 1.1 [Gezinkte Münzen]
Hinweis: Es empfiehlt sich zuerst die Aufgaben 1-6 in Quiz 1 zu bearbeiten.
Wir nehmen an, dass wir zwei gezinkte Münzen M_{gold} und M_{silber} in einer Urne haben. Die Wahrscheinlichkeit, dass M_{gold}, resp. M_{silber}, auf Kopf landet, sei $p_g \in (0, 1)$, resp. $p_s \in (0, 1)$. Bei jedem Zufallsexperiment wird eine Münze aus der Urne gezogen, dann geworfen und schliesslich wieder in die Urne gelegt. Wir führen das Zufallsexperiment zweimal durch.

(a) Gebe einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ an.

(b) Welches Element von $\mathcal{F}$ entspricht dem Ereignis $A =$"Beim ersten Wurf ist die Münze silber."?

(c) Welches Element von $\mathcal{F}$ entspricht dem Ereignis $B =$"Es wird zweimal Kopf geworfen."?

(d) Berechne $\mathbb{P}[A]$, $\mathbb{P}[B]$ und $\mathbb{P}[A \cap B]$. *(Wir nehmen an, dass die goldene und silberne Münze je mit Wahrscheinlichkeit* $1/2$ *aus der Urne gezogen werden.)*

Aufgabe 1.2 [Eigenschaften einer σ-Algebra]

(a) *[De-Morgan Regel]* Sei $(A_n)_{i\geq 1}$ eine Folge von beliebigen Mengen. Zeige, dass Folgendes gilt:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^{\mathsf{c}} = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i)^{\mathsf{c}}.$$

Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω.

(b) *[E4]* Zeige, dass $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(c) *[E5]* Sei $(A_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von Ereignissen, d.h. $A_i \in \mathcal{F}$ für alle $i \geq 1$. Zeige, dass

$$\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

(d) *[E6]* Seien $A, B \in \mathcal{F}$. Zeige, dass $A \cup B \in \mathcal{F}$.

(e) *[E7]* Seien $A, B \in \mathcal{F}$. Zeige, dass $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Aufgabe 1.3 [Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmasses]
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) *[E3]* Zeige, dass $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$.

(b) *[E4 - Additivität]* Sei $k \geq 1$ und seien $A_1, \ldots, A_k$ k paarweise disjunkte Ereignisse. Zeige, dass

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_k] = \mathbb{P}[A_1] + \cdots + \mathbb{P}[A_k].$$

(c) *[E5]* Sei A ein Ereignis. Zeige, dass $\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$.

(d) *[E6]* Seien A und B zwei beliebige Ereignisses (nicht notwendigerweise disjunkt). Zeige, dass die Additionsregel

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$$

gilt.

Aufgabe 1.4 [Perkolation: Selbstdualität auf $\mathbb{Z}^2$]

(a) Graph $G_n = (V_n, E_n)$ für $n = 3$ (b) Beispiel einer Perkolationskonfiguration ω

Abbildung 1

Sei $n \geq 1$. In dieser Aufgabe betrachten wir Perkolation auf dem endlichen Graphen $G_n = (V_n, E_n)$, der in Abbildung 1a dargestellt ist. Als Grundraum wählen wir $\Omega = \{0,1\}^{E_n}$ mit der σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Ein Elementarereignis $\omega = (\omega_e)_{e \in E_n} \in \Omega$ nennen wir eine *Perkolationskonfiguration* und wir sagen, dass eine Kante *offen* ist, falls $\omega_e = 1$, und *geschlossen* ist, falls $\omega_e = 0$. Abbildung 1b zeigt ein Beispiel einer Perkolationskonfiguration, wobei offene Kanten in rot und geschlossene Kanten gepunktet gezeichnet sind. Für den Perkolationsparameter $p = 1/2$ definieren wir das Wahrscheinlichkeitsmass $\mathrm{P}_{\frac{1}{2}}$ durch

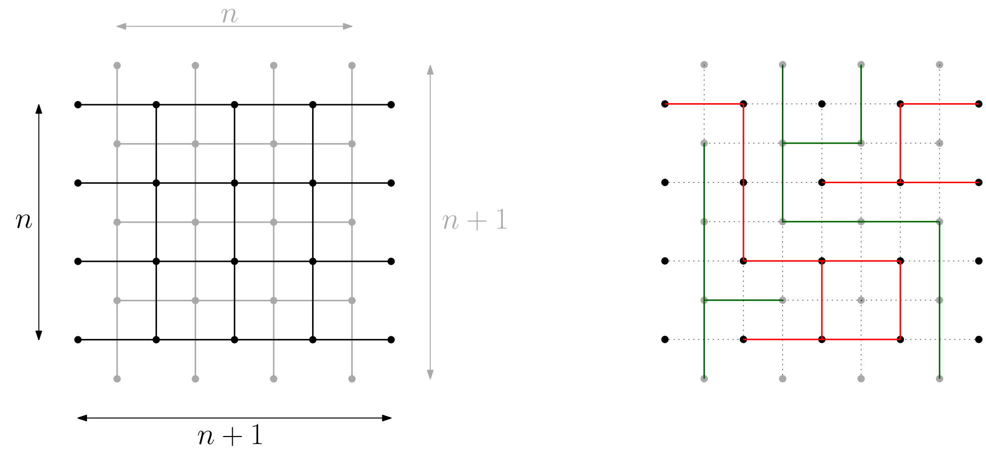
$$\mathrm{P}_{\frac{1}{2}}(\omega) := 2^{-|E_n|}.$$

(a) Überprüfe, dass $\mathrm{P}_{\frac{1}{2}}[\Omega] = 1$ gilt. Zeige, dass für jede Kante $e \in E_n$

$$\mathrm{P}_{\frac{1}{2}}[e \text{ ist offen}] = \frac{1}{2}.$$

Zusätzlich betrachten wir nun den dualen Graphen $G_n^\star = (V_n^\star, E_n^\star)$, der in Abbildung 2a dargestellt ist. Da jede Kante $e \in E_n$ genau eine Kante $e^\star \in E_n^\star$ schneidet, können wir für jedes ω eine duale Perkolationskonfiguration $\omega^\star$ definieren durch

$$\omega^\star_{e^\star} = 1 - \omega_e.$$



(a) Der Graph $G_n = (V_n, E_n)$ und der duale Graph $G_n^\star = (V_n^\star, E_n^\star)$ für $n = 3$

(b) Beispiel einer Perkolationskonfiguration ω und der dualen Perkolationskonfiguration $\omega^\star$

Abbildung 2

Eine Kante $e^\star$ in der dualen Perkolationskonfiguration $\omega^\star$ ist also genau dann offen, wenn die Kante e, die $e^\star$ schneidet, in der Perkolationskonfiguration ω geschlossen ist. Dies ist in Abbildung 2b dargestellt, wobei offene Kanten in ω in rot, offene Kanten in $\omega^\star$ in grün und geschlossene Kanten gepunktet gezeichnet sind.
Wir definieren die folgenden Ereignisse:

$$C := \{\exists \text{ einen offenen Pfad in } \omega \text{ von der linken zur rechten Seite von } G_n\}$$
$$D := \{\exists \text{ einen offenen Pfad in } \omega^\star \text{ von der oberen zur unteren Seite von } G_n^\star\}$$

Im Beispiel in Abbildung 2b gibt es einen offenen Pfad in $\omega^\star$ (grün) von der oberen zur unteren Seite, aber keinen offenen Pfad in ω (rot) von der linken zur rechten Seite.

(b) Überzeuge Dich davon, dass D das Komplement von C ist, d.h. $\Omega = C \cup D$ und $C \cap D = \emptyset$. Kannst Du dies beweisen?

(c) Zeige zunächst, dass $\mathrm{P}_{\frac{1}{2}}[e^\star \text{ ist offen}] = 1/2$ für jede Kante $e^\star \in E_n^\star$ gilt. Zeige dann, dass

$$\mathrm{P}_{\frac{1}{2}}[C] = \mathrm{P}_{\frac{1}{2}}[D].$$

(d) Schlussfolgere aus den vorherigen Teilaufgaben, dass

$$\mathrm{P}_{\frac{1}{2}}[C] = \frac{1}{2}.$$

In dieser Aufgabe hast Du bewiesen, dass die Wahrscheinlichkeit eines offenen Pfades von der linken zur rechten Seite in G_n gleich $1/2$ ist und zwar für jede Grösse n des Graphen. Dies ist eine besondere und wichtige Eigenschaft von Perkolation mit dem Perkolationsparameter $p = 1/2$. Wir werden auf dieses Resultat später wieder zurückkommen.