

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 13

Abgabe bis Mittwoch (01.06.2022) um 10:15 Uhr

Diese Serie beschäftigt sich mit der Konstruktion von Tests und dem Konzept des P-Werts.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
<https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/>

Aufgabe 13.1 [Likelihood-Quotienten-Test]

- (a) Sei $\Theta = [0, \infty)$ und seien X_1, \dots, X_n unabhängig, identisch verteilt mit $X_1 \sim \text{Exp}(\theta)$ unter \mathbb{P}_θ . Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = 1$ und die Alternativhypothese $H_A : \theta = 2$. Konstruiere den Likelihood-Quotienten-Test mit Parameter $c > 0$.
- (b) Sei $\Theta = [0, 1]$ und seien X_1, \dots, X_n unabhängig, identisch verteilt mit $X_1 \sim \text{Geom}(\theta)$ unter \mathbb{P}_θ . Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = 1/2$ und die Alternativhypothese $H_A : \theta = 3/4$. Konstruiere den Likelihood-Quotienten-Test mit Parameter $c > 0$.

Aufgabe 13.2 [Neyman–Pearson–Lemma]

Sei $\Theta = (0, \infty)$ und seien X_1, \dots, X_{10} unabhängig und identisch verteilt mit $X_1 \sim \text{Poisson}(\theta)$ unter \mathbb{P}_θ .

- (a) Konstruiere einen Test (T, K) für die Nullhypothese $\Theta_0 = \{1/2\}$ und die Alternativhypothese $\Theta_A = \{2\}$ mit Signifikanzniveau $\alpha = 0.2$, der zudem die folgende Eigenschaft erfüllt: Jeder andere Test (T', K') hat eine grössere Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art oder 2. Art.
- (b) Bestimme die Macht des in (a) konstruierten Tests.
- (c) Begründe, weshalb der in (a) konstruierte Test die gewünschte Eigenschaft erfüllt.

Hinweis: Verwende, dass $X_1 + \dots + X_{10} \sim \text{Poisson}(10\theta)$ unter \mathbb{P}_θ .

Aufgabe 13.3 [Zweiseitiger z -Test]

Die durchschnittliche Fahrzeit von Zürich nach Bellinzona mit einem Intercity-Zug beträgt 146 Minuten. Mit dem Cisalpino werden die folgenden Zeiten gemessen:

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 152 | 145 | 141 | 137 | 145 | 146 | 139 | 147 | 138 |

Wir nehmen an, dass diese Werte Realisierungen einer u.i.v. Stichprobe X_1, \dots, X_n sind mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei μ ein unbekannter Parameter und $\sigma^2 = 9$ ist. Führen Sie einen geeigneten Test durch, um auf dem 5%-Niveau festzustellen, ob die mittlere Fahrzeit des Cisalpino von jener des Intercity abweicht.

Aufgabe 13.4 [P-Wert]

Sei $H_0 : \theta = \theta_0$ eine einfache Nullhypothese. Wir nehmen an, dass die Teststatistik T eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f_T unter \mathbb{P}_{θ_0} ist und betrachten die geordnete Familie von Tests

$$(T, K_t)_{t \geq 0},$$

wobei $K_t := (t, +\infty)$. Zeige, dass der P-Wert $G(T)$ gleichverteilt ist auf $[0, 1]$ unter \mathbb{P}_{θ_0} .

Aufgabe 13.5 [z-Test und P-Wert]

Eine Klimaanlage schafft es, die Raumtemperatur bis auf eine Standardabweichung σ von 0.5 Grad Celsius konstant zu halten. Die angestrebte Raumtemperatur beträgt 20.00 Grad Celsius. An zehn aufeinanderfolgenden Tagen wurden die folgenden Temperaturen gemessen:

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | x_{10} |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| 20.71 | 19.76 | 20.56 | 21.39 | 21.00 | 19.67 | 20.92 | 20.31 | 20.39 | 20.72 |

Wir nehmen an, dass die gemessenen Temperaturen unabhängig voneinander und identisch normalverteilt sind.

- Führe einen geeigneten Test auf dem 5%-Niveau durch, um zu beurteilen, ob die Klimaanlage wirklich auf den Sollwert von 20.00 Grad geeicht ist.
- Berechne den realisierten P-Wert.