Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 2

Abgabe bis Mittwoch (09.03.2022) um 10:15 Uhr

In dieser Serie betrachten wir Anwendungen einer sehr wichtigen Ungleichung, die Union Bound genannt wird. Aufgabe 2 behandelt bedingte Wahrscheinlichkeiten und in den Aufgaben 3-4 beschäftigen wir uns mit dem zentralen Konzept der Zufallsvariable und deren Verteilungsfunktion.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

Aufgabe 2.1 [Union Bound I]
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(B_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge von fast sicher eintretenden Ereignissen, d.h. $\mathbb{P}[B_i] = 1, \forall i \geq 1$. Zeige, dass

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right] = 1,$$

d.h. fast sicher treten *alle* (unendlich vielen) Ereignisse ein.

Aufgabe 2.2 [Bedingte Wahrscheinlichkeiten: Federer vs. Nadal]
Wir analysieren einen Tennismatch von Roger Federer gegen Rafael Nadal. Der Match wird nach der Regel „best of 3“ gespielt; Sieger ist also, wer zuerst zwei Sätze gewinnt (es werden also maximal 3 Sätze gespielt). Wir nehmen an, dass Federer jeden einzelnen Satz – unabhängig von den anderen – mit Wahrscheinlichkeit $p = 1/3$ gewinnt. Mit A bezeichnen wir das Ereignis, dass Federer den ersten Satz gewinnt, und B bezeichne das Ereignis, dass Federer den Match (also zwei Sätze) gewinnt.

(a) Drücke $A \cup B$, $A^c \cap B$, $A \cap B^c$ und $A \setminus B$ in Worten aus. Berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P[B^c|A]$, $P[B|A]$ und $P[B|A^c]$.

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Federer den Match gewinnt.

(c) Berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P[A|B]$ und $P[A|B^c]$ mit Hilfe des Satzes von Bayes.

Aufgabe 2.3 [σ-Algebren & Zufallsvariablen]
Bei einem Zufallsexperiment werden ein grüner und ein blauer Würfel gleichzeitig geworfen. Wir wählen den Grundraum $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$. Wir betrachten zwei verschiedene σ-Algebren:

$$\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$$
$$\mathcal{F}_{sym} := \{A \subseteq \Omega : \forall(\omega_1, \omega_2) \in \Omega, (\omega_1, \omega_2) \in A \iff (\omega_2, \omega_1) \in A\}$$

Die σ-Algebra $\mathcal{F}$ enthält alle Teilmengen von Ω. In diesem Fall können wir also jedes Ergebnis des Zufallsexperiments beobachten, z.B. dass der blaue Würfel die Augenzahl 3 zeigt und der grüne Würfel die Augenzahl 5. Die σ-Algebra $\mathcal{F}_{sym}$ enthält nur symmetrische Teilmengen von Ω (mit Blick auf das Vertauschen der beiden Würfel). In diesem Fall können wir uns vorstellen, dass wir eine Brille tragen, die es uns nicht erlaubt, die Farben der Würfel zu erkennen. Wir können also beispielsweise beobachten, dass ein Würfel die Augenzahl 3 zeigt und der andere die Augenzahl 5, aber nicht dass der Würfel mit der Augenzahl 3 blau ist.

(a) Zeige, dass $\mathcal{F}_{sym}$ eine σ-Algebra ist.
Hinweis: Überprüfe hierzu, dass die drei Eigenschaften [E1]–[E3] aus Definition 1.1 erfüllt sind.

(b) Wir betrachten zwei Teilmengen von Ω:

$$A := \text{"Ein Würfel zeigt die Augenzahl 3"}, \\ B := \text{"Der blaue Würfel zeigt die Augenzahl 3"}.$$

Zeige, dass $A \in \mathcal{F}_{sym}$, aber $B \notin \mathcal{F}_{sym}$.

(c) Wir betrachten die Abbildungen

$$X : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 \end{cases} \qquad \text{"Augenzahl des blauen Würfels"}$$

$$S : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 + \omega_2 \end{cases} \qquad \text{"Augensumme der beiden Würfel"}$$

Zeige, dass X *keine* Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}_{sym})$ ist.
Zeige, dass S *eine* Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}_{sym})$ ist.

Aufgabe 2.4 [Verteilungsfunktion: Würfelwurf]
Bei einem Zufallsexperiment werden ein grüner und ein blauer Würfel gleichzeitig geworfen. Wir wählen den Grundraum $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$, die σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und das Wahrscheinlichkeitsmass $\mathbb{P}$ definiert durch

$$\mathbb{P}[(\omega_1, \omega_2)] = 1/36, \quad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega.$$

Als Zufallsvariablen betrachten wir

$$X : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 \end{cases} \qquad \text{"Augenzahl des blauen Würfels"}$$

$$X^2 : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto (\omega_1)^2 \end{cases} \qquad \text{"Das Quadrat der Augenzahl des blauen Würfels"}$$

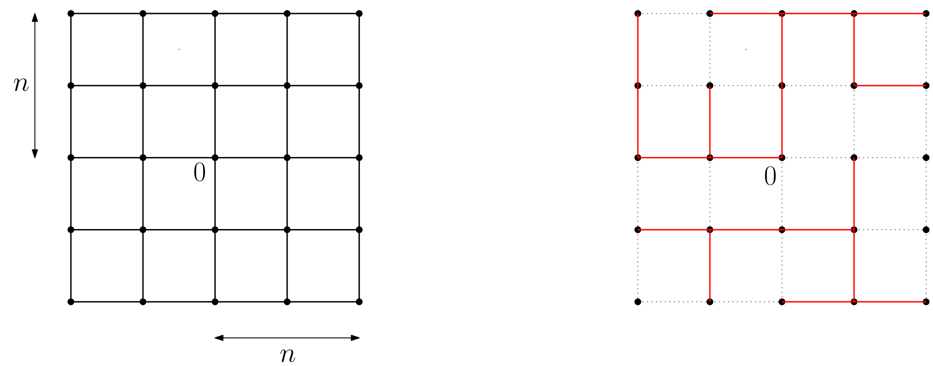
$$S : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 + \omega_2 \end{cases} \qquad \text{"Augensumme der beiden Würfel"}$$

(a) Zeichne die Verteilungsfunktion von X.

(b) Zeichne die Verteilungsfunktion von X^2.

(c) Zeichne die Verteilungsfunktion von S.

Aufgabe 2.5 [Union Bound II: Perkolation auf endlichen Boxen in $\mathbb{Z}^2$]
Sei $n \geq 1$. Wir betrachten in dieser Aufgabe Perkolation auf dem endlichen Graphen $G_n = (V_n, E_n)$,



(a) Graph $G_n = (V_n, E_n)$ für $n = 2$ (b) Beispiel einer Perkolationskonfiguration ω

Abbildung 1

der in Abbildung 1a dargestellt ist. Als Grundraum wählen wir $\Omega = \{0,1\}^{E_n}$ mit der σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und ein Elementarereignis $\omega = (\omega_e)_{e \in E_n} \in \Omega$ nennen wir eine *Perkolationskonfiguration*. Während wir in Aufgabe 1.4 die Besonderheit von Perkolation beim Parameter $p = 1/2$ analysiert haben (auf einem ähnlichen Graphen), erlauben wir nun einen beliebigen Parameter $p \in [0,1]$. Wir definieren das Wahrscheinlichkeitsmass P_p durch

$$\mathrm{P}_p(\omega) := p^{o(\omega)} \cdot (1-p)^{|E_n| - o(\omega)},$$

wobei $o(\omega) := |\{e \in \mathrm{E}_n : \omega_e = 1\}|$ die Anzahl offener Kanten in ω ist. Für $p = 1/2$ entspricht dies genau der Definition aus Aufgabe 1.4. Für jede Kante $e \in E_n$ definieren wir die Zufallsvariable

$$X_e : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R}, \\ \omega & \mapsto \omega_e. \end{cases}$$

Wir haben $X_e = 1$, wenn die Kante e offen ist und $X_e = 0$, wenn die Kante e geschlossen ist.

(a) Was ist die Verteilungsfunktion von X_e?

(b) Sei $m \geq 1$. Zeige, dass

$$|\{\gamma : \gamma \text{ ist ein Pfad der Länge } m, \text{ der bei 0 startet}\}| \leq 4^m.$$

(c) Wir sagen, dass ein Pfad γ offen ist, falls $X_e = 1$ für alle $e \in \gamma$ gilt. Zeige, dass

$$\mathrm{P}_p\left[\exists \text{ einen offenen Pfad } \gamma \text{ der Länge } m, \text{ der bei 0 startet}\right] \leq (4p)^m.$$

Hinweis: Zeige zuerst, dass für einen Pfad γ der Länge m gilt: $\mathrm{P}_p[\gamma \textit{ ist offen}] = p^m$.

(d) *[Bonus]* Zeige, dass für $p < 1/4$,

$$\mathrm{P}_p[\exists \text{ einen offenen Pfad von der linken zur rechten Seite von } G_n] \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Für $p < 1/4$ geht die Wahrscheinlichkeit eines offenen Pfads von der linken zur rechten Seite in einer Box der Grösse n also gegen 0 für $n \to \infty$. Dies steht in starkem Kontrast zum Verhalten beim Perkolationsparameter $p = 1/2$: Aus Aufgabe 1.4 folgt, dass die Wahrscheinlichkeit eines offenen Pfads von der linken zur rechten Seite von $G_n \geq 1/2$ ist für jede Grösse n.

(e) *[Bonus]* Zeige, dass für $p > 3/4$,

$$\mathrm{P}_p[\exists \text{ einen offenen Pfad von der linken zur rechten Seite von } G_n] \xrightarrow{n \to \infty} 1.$$