Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 3

Abgabe bis Mittwoch (16.03.2022) um 10:15 Uhr

Diese Serie beschäftigt sich mit der Konstruktion und Transformation von Zufallsvariablen, mit den Eigenschaften einer Verteilungsfunktion und mit einer wichtigen Verallgemeinerung des Existenz Theorems von Kolmogorov. In der letzten Aufgabe wenden wir diese Verallgemeinerung an, um Perkolation auf dem unendlichen Graphen $\mathbb{Z}^2$ zu definieren.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

Aufgabe 3.1 [Konstruktion von Zufallsvariablen]
Ziel dieser Aufgabe ist es, Zufallsvariablen aus einer Folge unabhängiger Münzwürfe zu konstruieren. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_i)_{i\geq 1}$ eine unendliche Folge von unabhängigen, Ber(1/2)-verteilten Zufallsvariablen. Wir betrachten den folgenden Algorithmus:

$i = 1$
While $X_i = X_{i+1} = 1$ **do**
  $i = i + 2$
endwhile
$Z = X_i + 2 \cdot X_{i+1}$
Return Z

(a) Zeige, dass der Algorithmus immer (mit Wahrscheinlichkeit 1) nach endlich vielen Schritten terminiert.

(b) Zeige, dass Z eine gleichverteilte Zufallsvariable in $\{0, 1, 2\}$ ist.

(c) Gebe einen Algorithmus an, der eine Ber(1/5)-verteilte Zufallsvariable ausgibt.

(d) *[Bonus]* Gebe einen Algorithmus an, der eine Ber($1/\pi$)-verteilte Zufallsvariable Z ausgibt.

Aufgabe 3.2 [Transformation von Zufallsvariablen]
Ziel dieser Aufgabe ist es, Zufallsvariablen durch Transformation einer gleichverteilten Zufallsvariable zu konstruieren. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und U eine gleichverteilte Zufallsvariable in $[0, 1]$, d.h. $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

(a) Konstruiere aus U eine Ber(1/3)-verteilte Zufallsvariable Z.

(b) Konstruiere aus U eine gleichverteilte Zufallsvariable U' in $[-1, 2]$. Was ist die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $(U')^2$?

(c) Konstruiere aus U eine Exp(λ)-verteilte Zufallsvariable Y.
Hinweis: Eine Zufallsvariable heisst exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ (kurz Exp(λ)-verteilt), falls folgende die Verteilungsfunktion hat:

$$F(a) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda a}, & \text{für } a \geq 0, \\ 0, & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

Aufgabe 3.3 [Verteilungsfuntion: Eigenschaften]
Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ziel dieser Aufgabe ist es, Eigenschaften der Verteilungsfunktion F_X von X zu beweisen. Zur Erinnerung: $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ ist für $a \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a].$$

(a) Zeige, dass F_X monoton wachsend ist, d.h. für alle $a \leq b$ gilt

$$F_X(a) \leq F_X(b).$$

(b) Zeige, dass F_X rechtsseitig stetig ist, d.h. für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$F_X(a+) := \lim_{h \downarrow 0} F_X(a+h) = F_X(a).$$

Hinweis: Nutze die Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmasses aus Proposition 1.11: Für eine monoton fallende Folge von Ereignissen $(A_n)_{n\geq 1}$ (d.h. $A_n \supseteq A_{n+1}$ für alle $n \geq 1$) gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right].$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft von F_X ist, dass

$$\lim_{a\to-\infty} F_X(a) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{a\to\infty} F_X(a) = 1.$$

Dies folgt aus $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$ und $\mathbb{P}[\Omega] = 1$ zusammen mit der Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmasses.

Aufgabe 3.4 [Existenz Theorem von Kolmogorov: Verallgemeinerung]
Sei $(F_i)_{i\geq 1}$ eine (unendliche) Folge monoton wachsender, rechtsstetiger Funktionen $F_i : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $\lim_{a\to-\infty} F_i(a) = 0$ und $\lim_{a\to\infty} F_i(a) = 1$. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen $(X_i)_{i\geq 1}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ existieren, sodass für die Verteilungsfunktionen gilt:

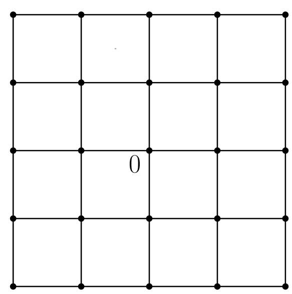
$$F_{X_i} = F_i, \quad \forall i \geq 1.$$

(a) Zeige, dass ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit unabhängigen, Bernoulli(1/2)-verteilten Zufallsvariablen $(X_{i,j})_{i,j\geq 1}$ existiert.
Hinweis: Nutze das Existenz Theorem von Kolmogorov.

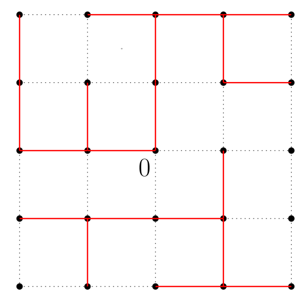
(b) Konstruiere basierend auf (a) eine Folge unabhängiger, $\mathcal{U}(0,1)$-verteilter Zufallsvariablen $(U_i)_{i\geq 1}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Erinnerung: Wir schreiben $\mathcal{U}(0,1)$ für die Gleichverteilung auf dem Intervall $[0,1]$.

(c) Zeige nun, dass eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen $(X_i)_{i\geq 1}$ existiert, sodass für die Verteilungsfunktionen $F_{X_i} = F_i$ für jedes $i \geq 1$ gilt.

Aufgabe 3.5 [Perkolation auf $\mathbb{Z}^2$: Phasenübergang und kritischer Parameter p_c]
In dieser Aufgabe betrachten wir Perkolation auf dem Quadratgitter $\mathbb{Z}^2$. Genauer gesagt ist dies der unendliche Graph $G = (\mathbb{Z}^2, E)$, bei dem nächste Nachbarn durch Kanten verbunden sind, d.h. $e = \{u, v\} \in E$ für zwei Knoten $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{Z}^2$, falls $|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2| = 1$. Ein Ausschnitt des Quadratgitters ist in Abbildung 1a gezeigt.



(a) Darstellung eines Ausschnitts des Quadratgitters $\mathbb{Z}^2$



(b) Perkolation auf einem Ausschnitt von $\mathbb{Z}^2$: offene Kanten in rot.

Abbildung 1

(a) Sei $p \in [0, 1]$. Zeige, dass ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit unabhängigen, Ber(p)-verteilten Zufallsvariablen $(X_e)_{e \in E}$ existiert.
Hinweis: Nutze das Resultat aus Aufgabe 3.4.

Somit ist es uns gelungen, Perkolation auf einem unendlichen Graphen zu definieren, indem wir eine unendliche Folge von unabhängigen, Ber(p)-verteilten Zufallsvariablen $(X_e)_{e \in E}$ betrachten. Wie bisher heisst eine Kante e offen, falls $X_e = 1$, und geschlossen, falls $X_e = 0$. Abbildung 1b zeigt ein Beispiel von Perkolation auf einem Ausschnitt des Quadratgitters $\mathbb{Z}^2$. Wir definieren nun

$$\theta(p) := \mathbb{P}\left[0 \leftrightarrow \infty\right] = \lim_{m \to \infty} \mathbb{P}\left[\exists \text{ einen offenen Pfad } \gamma \text{ der Länge } m, \text{ der bei 0 startet}\right]$$

und erhalten in Abhängigkeit des Parameters p eine Funktion

$$\begin{aligned} \theta \colon [0, 1] &\to [0, 1] \\ p &\mapsto \mathbb{P}\left[0 \leftrightarrow \infty\right] \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Funktion θ monton wachsend ist. Hierfür verwenden wir eine Technik, die Kopplung (engl. Coupling) genannt wird. Zuerst stellen wir fest, dass analog zu Aufgabenteil (a) ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit unabhängigen, $\mathcal{U}([0, 1])$-verteilten Zufallsvariablen $(U_e)_{e \in E}$ existiert. Auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum definieren wir für $p \in [0, 1]$ und $e \in E$ die Zufallsvariablen $Y_e^{(p)}$ durch

$$\begin{aligned} Y_e^{(p)} \colon \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \le U_e(\omega) < 1 - p, \\ 1, & \text{falls } 1 - p \le U_e(\omega) \le 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Sei $p \in [0, 1]$. Zeige, dass die Zufallsvariablen $(Y_e^{(p)})_{e \in E}$ unabhängig und Ber(p)-verteilt sind.

(c) Zeige, dass die Funktion θ monoton wachend in p ist.
Hinweis: Zeige zuerst, dass für $0 \le p \le q \le 1$ gilt:

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{e \in E} \left\{Y_e^{(p)} \le Y_e^{(q)}\right\}\right] = 1.$$

Wir definieren nun den kritischen Parameter

$$p_c := \sup\{p \in [0,1] : \theta(p) = 0\}.$$

Basierend auf dem Resultat aus Aufgabe 2.5 können wir bereits eine erste interessante Aussage über den Wert des kritischen Parameters treffen:

(d) Zeige, dass $p_c \geq 1/4$.
Hinweis: Nutze das Resultat aus Aufgabe 2.5 (c).