Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 4

Abgabe bis Mittwoch (23.03.2022) um 10:15 Uhr

Diese Übungsserie beschäftigt sich mit diskreten und stetigen Zufallsvariablen. In Aufgabe 4.3 geht es um eine Anwendung der Exponentialverteilung und in Aufgabe 4.4 um die Frage, wann die Verteilungsfunktion linksseitig stetig ist. In der Perkolationsaufgabe 4.5 zeigen wir, dass der kritische Parameter des Quadratgitters strikt kleiner als 1 ist.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

Aufgabe 4.1 [Diskrete Zufallsvariable: Verteilungsfuntion und Gewichtsfunktion]
Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 1, \\ 1/5, & \text{falls } 1 \leq a < 4, \\ 3/4, & \text{falls } 4 \leq a < 6, \\ 1, & \text{falls } 6 \leq a. \end{cases}$$

(a) Skizziere die Verteilungsfunktion von X.

(b) Zeige, dass X eine diskrete Zufallsvariable ist.

(c) Berechne die Gewichtsfunktion von X und skizziere diese.

(d) Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}[X = 6],\ \mathbb{P}[X = 5],\ \mathbb{P}[2 < X < 5.5],\ \mathbb{P}[0 \leq X < 4].$$

Aufgabe 4.2 [Stetige Zufallsvariablen: Verteilungsfunktion und Dichte]
Sei T eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_T(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 0, \\ 1 - e^{-2a}, & \text{falls } a \geq 0. \end{cases}$$

(a) Skizziere die Verteilungsfunktion von T.

(b) Zeige, dass T eine stetige Zufallsvariable ist.

(c) Bereche die Dichte von T.

(d) Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}[T = 2],\ \mathbb{P}[T \leq 1],\ \mathbb{P}[T \geq 2],\ \mathbb{P}[1 < T < 4].$$

Aufgabe 4.3 [Anwendung der Exponentialverteilung]
Wir betrachten eine Messsonde an einem Vulkankrater, welche den bevorstehenden Ausbruch beobachten soll. Ab Beginn der Messungen gehen wir davon aus, dass die Sonde innerhalb von einer Minute mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{20}$ wegen zu grosser Beschädigung ausfällt. Die Zufallsvariable Y bezeichne die Lebensdauer der Sonde in Minuten. Es gilt $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$, d.h. Y ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Bestimme λ.

Hinweis: Falls Du a) nicht gelöst hast, so rechne für die weiteren Teilaufgaben mit $\lambda = -\ln(0.95)$.

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde mehr als 10 Minuten überlebt?

(c) Wir wissen, dass die Sonde schon mehr als 20 Minuten überlebt hat. Wie gross ist dann die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde nochmals 10 Minuten überlebt?

Aufgabe 4.4 [Verteilungsfuntion: (Un-)Stetigkeitsstellen]
Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Gemäss Theorem 2.4 ist die Verteilungsfunktion von X an jeder Stelle rechtsseitig stetig. In dieser Aufgabe beantworten wir die Frage, an welchen Stellen F_X auch linksseitig stetig (und somit stetig) ist. Zur Erinnerung: F_X ist *linksseitig stetig* an der Stelle $a \in \mathbb{R}$, falls

$$F_X(a-) := \lim_{h \downarrow 0} F_X(a-h) = F_X(a).$$

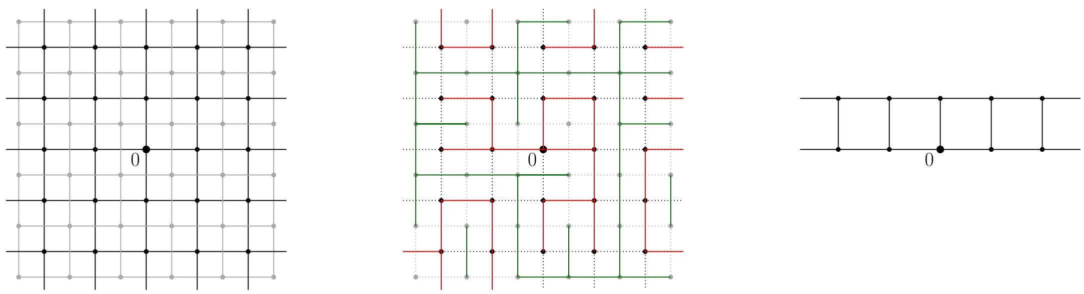
(a) Zeige, dass

$$\mathbb{P}[X = a] = F_X(a) - F_X(a-) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Nutze die Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmasses aus Proposition 1.11.

(b) Schlussfolgere, dass F_X an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ stetig ist genau dann, wenn $\mathbb{P}[X = a] = 0$ gilt.

Aufgabe 4.5 [Perkolation auf unendlichen Graphen: kritischer Parameter p_c]



(a) Darstellung eines Ausschnitts des Quadratgitters G und des dualen Graphen $G^\star$

(b) Perkolation: offene Kanten des Graphen G in rot, offene Kanten des dualen Graphen $G^\star$ in grün.

(c) Darstellung eines Ausschnitts des Graphen $\mathbb{Z} \times \{0,1\}$

Abbildung 1

In Aufgabe 3.5 haben wir Perkolation mit Parameter $p \in [0,1]$ auf dem unendlichen Graphen $G = (\mathbb{Z}^2, E)$ definiert, indem wir unabhängige, Ber(p)-verteilte Zufallsvariablen $(X_e)_{e \in E}$ betrachtet haben. Wir haben die monoton wachsende Funktion $\theta : [0,1] \to [0,1]$ mit

$$\theta(p) := \mathbb{P}[0 \leftrightarrow \infty] = \lim_{m \to \infty} \mathbb{P}[\exists \text{ einen offenen Pfad } \gamma \text{ der Länge } m, \text{ der bei 0 startet}]$$

eingeführt, den kritischen Parameter

$$p_c(\mathbb{Z}^2) := \sup\{p \in [0,1] : \theta(p) = 0\}$$

definiert und gezeigt, dass $p_c(\mathbb{Z}^2) > 0$ gilt. Wir wollen nun zeigen, dass $p_c(\mathbb{Z}^2) < 1$ gilt.

Wie in Aufgabe 1.4 definieren wir Perkolation auf dem dualen Graphen $G^\star = (V^\star, E^\star)$ (siehe Abbildung 1a) wie folgt: Jede Kante $e \in E$ schneidet genau eine Kante $e^\star \in E^\star$. Somit können wir eine Familie von Zufallsvariablen $(X_{e^\star})_{e^\star \in E^\star}$ durch

$$X_{e^\star} := 1 - X_e$$

definieren. Eine Kante $e^\star$ im dualen Graphen ist also genau dann offen ($X_{e^\star} = 1$), wenn die Kante e, die $e^\star$ schneidet, geschlossen ist ($X_e = 0$). Dies ist in Abbildung 1b dargestellt.

(a) Sei $p \in [0,1]$. Zeige, dass

$$\mathbb{P}[\exists \text{ einen offenen Kreis der Länge } m \text{ in } G^\star, \text{ der 0 umkreist}] \leq m \cdot 4^m \cdot (1-p)^m.$$

(b) Zeige, dass es $p' < 1$ gibt, sodass

$$\mathbb{P}[\exists \text{ einen offenen Kreis in } G^\star, \text{ der 0 umkreist}] \leq 1/2.$$

Schlussfolgere, dass $p_c(\mathbb{Z}^2) \leq p' < 1$ gilt.

Wir haben nun gezeigt, dass $0 < p_c(\mathbb{Z}^2) < 1$, d.h. Perkolation auf dem Quadratgitter $\mathbb{Z}^2$ hat einen Phasenübergang von dem Parameterregime $[0, p_c)$, indem das Ereignis $\{0 \leftrightarrow \infty\}$ *nie* eintritt, zu dem Parameterregime $(p_c, 1]$, indem das Ereignis $\{0 \leftrightarrow \infty\}$ mit *positiver* Wahrscheinlichkeit eintritt. Die folgende Teilaufgabe zeigt, dass dies nicht für jeden unendlichen Graphen der Fall ist.

(c) Betrachte Perkolation auf dem unendlichen Graphen $H = (\mathbb{Z} \times \{0,1\}, E)$, der in Abbildung 1c dargestellt ist. Analog können wir auch hier die Funktion θ und den kritischen Parameter $p_c(\mathbb{Z} \times \{0,1\})$ definieren. Zeige, dass $p_c(\mathbb{Z} \times \{0,1\}) = 1$.