Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 5

Abgabe bis Mittwoch (30.03.2022) um 10:15 Uhr

Diese Übungsserie beschäftigt sich mit dem Erwartungswert diskreter und stetiger Zufallsvariablen. In Aufgabe 4.4 geht es ausserdem um die Charakterisierung der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen mit Hilfe des Erwartungswerts.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

Aufgabe 5.1 [Erwartete Laufzeit eines Algorithmus I]
In dieser Aufgabe betrachten wir erneut den Algorithmus aus Aufgabe 3.1:

$$
\begin{array}{l}
i = 1 \\
\textbf{While} \quad X_i = X_{i+1} = 1 \quad \textbf{do} \\
\qquad\quad i = i + 2 \\
\textbf{endwhile} \\
Z = X_i + 2 \cdot X_{i+1} \\
\textbf{Return} \quad Z
\end{array}
$$

Zur Erinnerung: $(X_i)_{i \geq 1}$ ist eine unendliche Folge von unabhängigen, Ber(1/2)-verteilten Zufallsvariablen und aus 3.1 (a) und (b) wissen wir, dass dieser Algorithmus immer nach endlich vielen Schritten terminiert und eine gleichverteilte Zufallsvariable in $\{0, 1, 2\}$ ausgibt.

(a) Sei T die Laufzeit des Algorithmus, also die Anzahl der Durchläufe der While-Schleife. Berechne die erwartete Laufzeit $\mathbb{E}[T]$.
Hinweis: Verwende die "Tailsum Formel" aus Proposition 4.15.

(b) Um drei unabhängige Zufallsvariablen zu erhalten, die gleichverteilt in $\{0, 1, 2\}$ sind, führen wir den Algorithmus dreimal hintereinander aus. Was ist die erwartete Laufzeit?

Aufgabe 5.2 [Erwartungswert stetiger ZVen I]
Nehmen wir an, dass $-\infty < a < b < \infty$ und $c > 0$.

(a) Sei $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Berechne die Dichte von $U' := a + (b - a)U$. Was ist der Erwartungswert von U'?

(b) Sei $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$. Berechne die Dichte von $T' := c \cdot T^2$. Was ist der Erwartungswert von T'?
Hinweis: Nutze die Charakterisierung stetiger Zufallsvariablen aus Proposition 4.16.

Aufgabe 5.3 [Erwartungswert stetiger ZVen II]
Sei $r > 1$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1, \\ cx^{-r} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

für ein $c > 0$.

(a) Bestimme die Konstante c, sodass f zu einer Dichtefunktion wird.

(b) Wir nehmen ab jetzt an, dass die Konstante so bestimmt ist, dass f zu einer Dichtefunktion wird. Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f_X = f$. Berechne die Verteilungsfunktion von X.

(c) Berechne den Erwartungswert von X. Für welche Werte von r ist der Erwartungswert endlich?

Aufgabe 5.4 [Charakterisierung der Unabhängigkeit von ZVen]
Seien T_1, T_2, T_3 drei unabhängige Zufallsvariablen mit

$$T_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Definiere die Zufallsvariable $S := T_1 \cdot T_2$.

(a) Berechne den Erwartungswert von S.
Hinweis: Nutze Theorem 4.13, also dass für zwei unabhängige Zufallsvariablen X, Y gilt $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$, wenn die Erwartungswerte wohldefiniert sind.

(b) Zeige, dass die Zufallsvariablen S und T_3 unabhängig sind.
Hinweis: Nutze das Resultat aus Proposition 2.6 zur Gruppierung von unabhängigen Zufallsvariablen.

Aufgabe 5.5 [Erwartete Laufzeit eines Algorithmus II]
Sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine unendliche Folge von unabhängigen, Ber(1/2)-verteilten Zufallsvariablen. Wir betrachten den folgenden Algorithmus:

$i = 1$
While $\big(X_i = 0 \mid\mid X_{i+1} = 0 \mid\mid X_{i+2} = 0 \big)$ **do**
  $i = i + 1$
endwhile
$S = i + 2$
Return S

(a) Was gibt der Algorithmus aus?

(b) Zeige, dass

$$\mathbb{E}[S] \leq 24.$$