Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

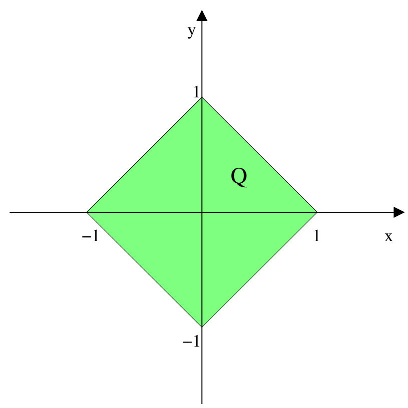
Serie 7

Abgabe bis Mittwoch (13.04.2022) um 10:15 Uhr

Diese Serie beschäftigt sich mit dem Konzept der Kovarianz und mit der gemeinsamen Verteilung stetiger Zufallsvariablen.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

Aufgabe 7.1 [Gemeinsame Verteilung stetiger Zufallsvariablen I]
Die gemeinsame Dichte $f(x, y)$ zweier stetiger Zufallsvariablen X, Y sei im Quadrat Q (vgl. Skizze) konstant und verschwinde ausserhalb von Q.



(a) Bestimme die gemeinsame Dichte von (X, Y).

(b) Bestimme die Randdichten f_X und f_Y der Zufallsvariablen X und Y.

(c) Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig? Begründe die Antwort mit einem mathematischen Argument!

(d) Was ist die Antwort in (c), wenn das Quadrat Q um 45 Grad gedreht wird?

Aufgabe 7.2 [Gemeinsame Verteilung stetiger ZVen II: Extrema gleichverteilter ZVen]
Seien U_1, U_2, U_3 unabhängige, $\mathcal{U}([0,1])$-verteilte Zufallsvariablen. Wir betrachten die stetigen Zufallsvariablen

$$L := \min(U_1, U_2, U_3) \quad \text{und} \quad M := \max(U_1, U_2, U_3).$$

(a) Berechne die Dichte von M und die Dichte von L.
Hinweis: Berechne $\mathrm{E}[\phi(M)]$ *(resp.* $\mathrm{E}[\phi(L)]$*) für* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stückweise stetig, beschränkt und verwende die Charaktierisierung aus Proposition 4.16.*

(b) Zeige, dass für $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, beschränkt

$$\mathrm{E}[\phi(M) \cdot \psi(L)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(m) \cdot \psi(\ell) \cdot 6(m-\ell) \mathbb{1}_{0 \le \ell \le m \le 1} \, d\ell dm.$$

(c) Nutze (b), um die gemeinsame Verteilungsfunktion und die gemeinsame Dichte von (M, L) zu bestimmen.

Aufgabe 7.3 [Korrelation & Unabhängigkeit]
Für zwei unabhängige Zufallsvariablen X, Y ist aus der Vorlesung bekannt, dass

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0,$$

d.h. die Zufallsvariablen sind unkorreliert. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Umkehrung dieser Aussage im Allgemeinen nicht gilt.

(a) Sei $X \sim \mathcal{U}([-\pi, \pi])$. Zeige, dass $Y := \cos(X)$ und $Z := \sin(X)$ unkorreliert sind, d.h.

$$\mathrm{Cov}(Y, Z) = 0.$$

(b) Zeige, dass Y und Z nicht unabhängig sind.

Aufgabe 7.4 [Gemeinsame Verteilung stetiger ZVen III: 2-dim. Normalverteilung]
Seien X_1, X_2 zwei stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right),$$

wobei

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} & \Sigma_{1,2} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

mit $\Sigma_{1,2} = \Sigma_{2,1}$ und $\det(\Sigma) > 0$.

(a) Zeige, dass $\mathrm{Var}(X_1) = \Sigma_{1,1}$, $\mathrm{Var}(X_2) = \Sigma_{2,2}$ und $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \Sigma_{1,2}$.
Hinweis: Benutze, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 - bx)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(\frac{b^2}{4a})$ für $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$.

(b) Zeige, dass X_1 und X_2 genau dann unabhängig sind, wenn $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$.
Anmerkung: Dies ist eine besondere Eigenschaft der mehrdimensionalen Normalverteilung.

Die Verteilung von $X = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$ wird zweidimensionale Normalverteilung genannt.