Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 8

Abgabe bis Mittwoch (27.04.2022) um 10:15 Uhr

Diese Serie beschäftigt sich mit Anwendungen des Gesetz der grossen Zahlen und des zentralen Grenzwertsatz.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

Aufgabe 8.1 [Normalverteilung]
Sei $n \geq 1$ und $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{N}(1, 4)$ für jedes $1 \leq i \leq n$. Wir definieren die folgenden Zufallsvariablen:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

und

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{S_n}{n}.$$

Zur Erinnerung: Wir schreiben $\Phi(a) = \mathbb{P}[Z \leq a]$ für $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Numerische Werte für Φ finden sich beispielsweise unter `https://de.wikipedia.org/wiki/Standardnormalverteilungstabelle`.

(a) Bestimme die Verteilung von S_n sowie $\bar{X}_n$.
Hinweis: Nutze die Eigenschaften der Normalverteilung aus Kapitel 3.6.

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\mathbb{E}[X_1] - 1 \leq X_1 \leq \mathbb{E}[X_1] + 1]$.

(c) Berechne $\mathbb{P}[\mathbb{E}[S_n] - 1 \leq S_n \leq \mathbb{E}[S_n] + 1]$ für $n = 50$.

(d) Berechne $\mathbb{P}[\mathbb{E}[\bar{X}_n] - 1 \leq \bar{X}_n \leq \mathbb{E}[\bar{X}_n] + 1]$ für $n = 50$.

Aufgabe 8.2 [Gesetz der grossen Zahlen I: Empirische Verteilungsfunktion]
Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Die empirische Verteilungsfunktion $F_n : \mathbb{R} \times \Omega \to [0, 1]$ ist gegeben durch

$$F_n(t, \omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i(\omega) \leq t}.$$

Der Wert $F_n(t, \omega)$ beschreibt also die relative Häufigkeit der $X_i(\omega)$ mit Werten $\leq t$ unter den ersten n. Damit ist $F_n(t) := F_n(t, \cdot)$ selbst eine Zufallsvariable für jedes $t \in \mathbb{R}$.

(a) Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig und $Y_i := \mathbb{1}_{X_i \leq t}$ für $i \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $Y_1, Y_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen ist. Was ist $\mathbb{E}[Y_1]$?

(b) Zeige, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ die empirische Verteilungsfunktion $F_n(t)$ fast sicher gegen $F(t)$ konvergiert für $n \to \infty$.

Aufgabe 8.3 [Gesetz der grossen Zahlen II: Approximation von π mit Münzwürfen]
In der Vorlesung wurde gezeigt, wie man die Zahl π mit Hilfe von $\mathcal{U}([0,1])$-verteilten Zufallsvariablen approximieren kann. Ziel dieser Aufgabe ist es, dies nun mit Hilfe einer Folge $(X_i)_{i\geq 1}$ unabhängiger, Ber(1/2)-verteilter Zufallsvariablen zu tun.

(a) Sei $n \geq 1$. Für $i, j \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ definieren wir Quadrate mit Seitenlänge 2^{-n} durch

$$S_{i,j} := [i \cdot 2^{-n}, (i+1) \cdot 2^{-n}] \times [j \cdot 2^{-n}, (j+1) \cdot 2^{-n}].$$

Zeige, dass $2n$ Ber(1/2)-verteilte Zufallsvariablen ausreichen, um zufällig eines der Quadrate $S_{i,j}$ auszuwählen (sodass jedes Quadrat mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt wird).

(b) Wir wollen einen Algorithmus finden, der die (zufälligen) Bits $X_1, X_2, \ldots$ als Input nimmt, und als Output eine Ber($\pi/4$)-verteilte Zufallsvariable ausgibt. Gebe einen solchen Algorithmus an, sodass

$$\mathbb{P}[T > 2n] \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

wobei T die Anzahl der benötigten Input Bits bezeichnet.

Hinweis: Ein Punkt $(x, y) \in [0,1]^2$ liegt innerhalb des Einheitskreises genau dann, wenn $x^2 + y^2 \leq 1$.

(c) Wie können wir den Algorithmus aus Teilaufgabe (b) nutzen, um die Zahl π zu approximieren?

Aufgabe 8.4 [Zentraler Grenzwertsatz I: Zufällige Irrfahrt]
Seien $(X_i)_{i\geq 1}$, $(Y_i)_{i\geq 1}$ und $(Z_i)_{i\geq 1}$ Folgen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}[X_1 = 1] = \mathbb{P}[X_1 = -1] = 1/2$$

und analog $\mathbb{P}[Y_1 = 1] = \mathbb{P}[Y_1 = -1] = 1/2$ sowie $\mathbb{P}[Z_1 = 1] = \mathbb{P}[Z_1 = -1] = 1/2$. Wir definieren

$$S_n^{(x)} := \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_n^{(y)} := \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \text{and} \quad S_n^{(z)} := \sum_{i=1}^n Z_i.$$

Die Folge $\big((S_n^{(x)}, S_n^{(y)}, S_n^{(z)})\big)_{n\geq 1}$ wird zufällige Irrfahrt in $\mathbb{Z}^3$ genannt. Sei $\alpha > 1/2$. Zeige, dass

$$\mathbb{P}\left[\|(S_n^{(x)}, S_n^{(y)}, S_n^{(z)})\|_2 \leq n^\alpha\right] \to 1 \text{ as } n \to \infty,$$

wobei $\|(x,y,z)\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die euklidische Norm ist.
Hinweis: Betrachte zuerst die Folge $(S_n^{(x)})_{n\geq 1}$ und wende den zentralen Grenzwertsatz an.

Aufgabe 8.5 [Zentraler Grenzwertsatz II]
In dieser Aufgabe berechnen wir den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}.$$

(a) Sei $X \sim$ Poisson(λ) für ein $\lambda > 0$. Berechne $\mathbb{E}[X]$ und σ_X^2.

(b) Zeige mit dem zentralen Grenzwertsatz, dass der obige Grenzwert 1/2 ist.

Hinweis: Für zwei unabhängige Zufallsvariablen X, Y mit $X \sim$ Poisson(λ), $\lambda > 0$, und $Y \sim$ Poisson(μ), $\mu > 0$, ist $X + Y \sim$ Poisson($\lambda + \mu$).