Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 9

Abgabe bis Mittwoch (04.05.2022) um 10:15 Uhr

Diese Serie beschäftigt sich mit dem Konzept von Schätzern und mit der χ^2-Verteilung.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

Aufgabe 9.1 [Schätzer I: gleichverteilte Zufallsvariablen]
Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{U}([\theta - 1, \theta])$ unter $\mathbb{P}_\theta$, wobei $\theta \in \mathbb{R}$ ein unbekannter Parameter ist. Für θ bieten sich

$$T_1^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i + 1/2) \quad \text{und} \quad T_2^{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$$

als Schätzer an. Wir untersuchen in dieser Aufgabe, welche Eigenschaften diese beiden Schätzer besitzen.

(a) Untersuche, ob die Schätzer erwartungstreu sind.

(b) Berechne die Varianzen der Schätzer $\mathrm{Var}_\theta[T_1^{(n)}]$ und $\mathrm{Var}_\theta[T_2^{(n)}]$.

(c) Berechne die mittleren quadratischen Schätzfehler $\mathrm{MSE}_\theta[T_1^{(n)}]$ und $\mathrm{MSE}_\theta[T_2^{(n)}]$.

Aufgabe 9.2 [Schätzer II: Hochwasser im Zürichsee]
Wir betrachten Pegelstände bei Hochwasser im Zürichsee. Hochwasser bedeute dabei, dass der Pegelstand die kritische Marke von 140 cm über Normalniveau überschreitet. Die Zufallsvariable X messe die Wasserhöhe in cm über der kritischen Marke. Zur Modellierung von X können wir eine sogenannte verallgemeinerte Pareto-Verteilung mit Dichte

$$f_X(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}(1+x)^{-(1+\frac{1}{\theta})} & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

verwenden. Dabei ist $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter, der auf Basis von Daten $x_1, \dots, x_n$ geschätzt werden soll; diese Daten werden wie üblich als Realisierungen von Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ aufgefasst, die für jede Wahl des Parameters θ unter $\mathbb{P}_\theta$ u.i.v. sind mit Dichte $f_X(x;\theta)$. Als Schätzer für θ verwenden wir

$$T^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\log(1+X_i)}{n}.$$

(a) Berechne den Erwartungswert und die Varianz von $T^{(n)}$ im Modell $\mathbb{P}_\theta$ für jedes $\theta > 0$.
Hinweis: Benutze, dass $Y_i := \log(1+X_i) \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{\theta})$ ist, d.h. Y_i hat unter $\mathbb{P}_\theta$ die Dichte $f_Y(y) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta} y} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}}$.

(b) Ist $T^{(n)}$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ?

(c) Berechne den mittleren quadratischen Schätzfehler $\mathrm{MSE}_\theta[T^{(n)}]$ im Modell $\mathbb{P}_\theta$ für jedes $\theta > 0$.

Aufgabe 9.3 [χ^2**-Verteilung**]
Sei Y eine χ^2_n-verteilte Zufallsvariable mit $n \in \mathbb{N}$, das heisst

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$

wobei $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt sind.

(a) Zeige, dass
$$\mathbb{E}[Y] = n \quad \text{und} \quad \sigma_Y^2 = 2n$$
gilt.

(b) Gebe mit Hilfe der Chebyshev-Ungleichung eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit
$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{Y}{n} - 1\right| \leq 0.75\right].$$
Berechne die Schranke für $n = 12$.

(c) Berechne für $n = 12$ eine Annäherung für die obige Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.