

# Wahrscheinlichkeit & Statistik

## Serie 1

**Abgabe am Ende der Übungsstunde oder bis Mittwoch (02.03.2022) um 10:15 Uhr**

Diese Serie beschäftigt sich mit dem Begriff des Wahrscheinlichkeitsraums  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  und dabei insbesondere mit den Eigenschaften von  $\sigma$ -Algebren und Wahrscheinlichkeitsmassen. In der Perkolationaufgabe geht es um die Besonderheit des Perkulationsparameters  $p = 1/2$  und wir beantworten eine offene Frage aus der Vorlesung.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter  
<https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/>

---

### Aufgabe 1.1 [Gezinkte Münzen]

*Hinweis: Es empfiehlt sich zuerst die Aufgaben 1-6 in Quiz 1 zu bearbeiten.*

Wir nehmen an, dass wir zwei gezinkte Münzen  $M_{gold}$  und  $M_{silber}$  in einer Urne haben. Die Wahrscheinlichkeit, dass  $M_{gold}$ , resp.  $M_{silber}$ , auf Kopf landet, sei  $p_g \in (0, 1)$ , resp.  $p_s \in (0, 1)$ . Bei jedem Zufallsexperiment wird eine Münze aus der Urne gezogen, dann geworfen und schliesslich wieder in die Urne gelegt. Wir führen das Zufallsexperiment zweimal durch.

- Gebe einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  an.
- Welches Element von  $\mathcal{F}$  entspricht dem Ereignis  $A =$  "Beim ersten Wurf ist die Münze silber"?
- Welches Element von  $\mathcal{F}$  entspricht dem Ereignis  $B =$  "Es wird zweimal Kopf geworfen"?
- Berechne  $\mathbb{P}[A]$ ,  $\mathbb{P}[B]$  und  $\mathbb{P}[A \cap B]$ . (*Wir nehmen an, dass die goldene und silberne Münze je mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  aus der Urne gezogen werden.*)

### Aufgabe 1.2 [Eigenschaften einer $\sigma$ -Algebra]

- [De-Morgan Regel] Sei  $(A_n)_{n \geq 1}$  eine Folge von beliebigen Mengen. Zeige, dass Folgendes gilt:

$$\left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i)^c.$$

Sei  $\mathcal{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ .

- [E4] Zeige, dass  $\emptyset \in \mathcal{F}$ .
- [E5] Sei  $(A_i)_{i \geq 1}$  eine Folge von Ereignissen, d.h.  $A_i \in \mathcal{F}$  für alle  $i \geq 1$ . Zeige, dass

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

- [E6] Seien  $A, B \in \mathcal{F}$ . Zeige, dass  $A \cup B \in \mathcal{F}$ .
- [E7] Seien  $A, B \in \mathcal{F}$ . Zeige, dass  $A \cap B \in \mathcal{F}$ .

**Aufgabe 1.3 [Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmasses]**

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum.

- (a) [E3] Zeige, dass  $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$ .
- (b) [E4 - Additivität] Sei  $k \geq 1$  und seien  $A_1, \dots, A_k$   $k$  paarweise disjunkte Ereignisse. Zeige, dass

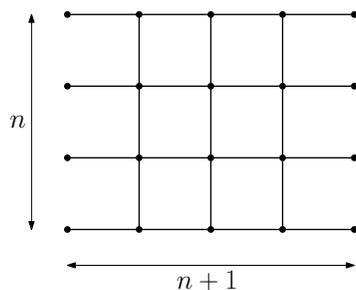
$$\mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_k] = \mathbb{P}[A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_k].$$

- (c) [E5] Sei  $A$  ein Ereignis. Zeige, dass  $\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$ .
- (d) [E6] Seien  $A$  und  $B$  zwei beliebige Ereignisses (nicht notwendigerweise disjunkt). Zeige, dass die Additionsregel

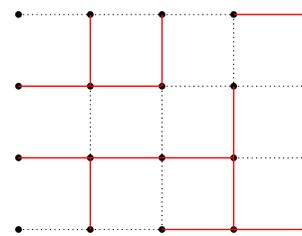
$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$$

gilt.

**Aufgabe 1.4 [Perkolations: Selbstdualität auf  $\mathbb{Z}^2$ ]**



(a) Graph  $G_n = (V_n, E_n)$  für  $n = 3$



(b) Beispiel einer Perkolationskonfiguration  $\omega$

Abbildung 1

Sei  $n \geq 1$ . In dieser Aufgabe betrachten wir Perkolations auf dem endlichen Graphen  $G_n = (V_n, E_n)$ , der in Abbildung 1a dargestellt ist. Als Grundraum wählen wir  $\Omega = \{0, 1\}^{E_n}$  mit der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Ein Elementarereignis  $\omega = (\omega_e)_{e \in E_n} \in \Omega$  nennen wir eine *Perkolationskonfiguration* und wir sagen, dass eine Kante *offen* ist, falls  $\omega_e = 1$ , und *geschlossen* ist, falls  $\omega_e = 0$ . Abbildung 1b zeigt ein Beispiel einer Perkolationskonfiguration, wobei offene Kanten in rot und geschlossene Kanten gepunktet gezeichnet sind. Für den Perkolationsparameter  $p = 1/2$  definieren wir das Wahrscheinlichkeitsmass  $P_{\frac{1}{2}}$  durch

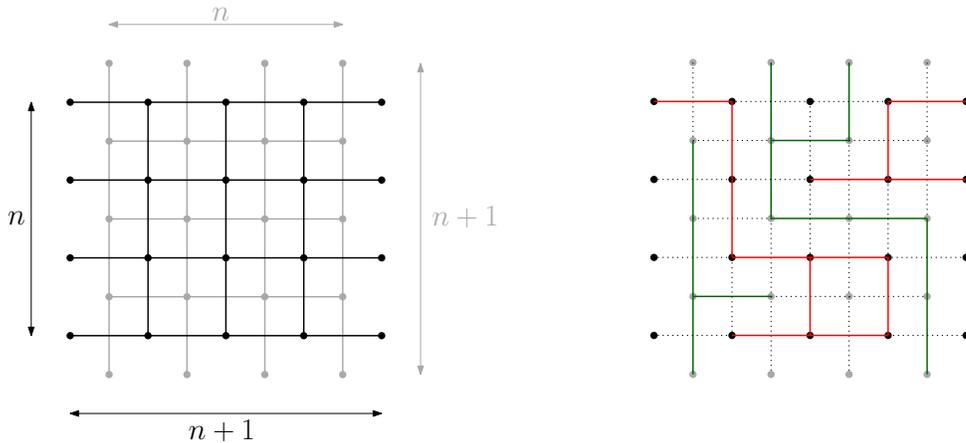
$$P_{\frac{1}{2}}(\omega) := 2^{-|E_n|}.$$

- (a) Überprüfe, dass  $P_{\frac{1}{2}}[\Omega] = 1$  gilt. Zeige, dass für jede Kante  $e \in E_n$

$$P_{\frac{1}{2}}[e \text{ ist offen}] = \frac{1}{2}.$$

Zusätzlich betrachten wir nun den dualen Graphen  $G_n^* = (V_n^*, E_n^*)$ , der in Abbildung 2a dargestellt ist. Da jede Kante  $e \in E_n$  genau eine Kante  $e^* \in E_n^*$  schneidet, können wir für jedes  $\omega$  eine duale Perkolationskonfiguration  $\omega^*$  definieren durch

$$\omega_{e^*}^* = 1 - \omega_e.$$



(a) Der Graph  $G_n = (V_n, E_n)$  und der duale Graph  $G_n^* = (V_n^*, E_n^*)$  für  $n = 3$

(b) Beispiel einer Perkolationskonfiguration  $\omega$  und der dualen Perkolationskonfiguration  $\omega^*$

Abbildung 2

Eine Kante  $e^*$  in der dualen Perkolationskonfiguration  $\omega^*$  ist also genau dann offen, wenn die Kante  $e$ , die  $e^*$  schneidet, in der Perkolationskonfiguration  $\omega$  geschlossen ist. Dies ist in Abbildung 2b dargestellt, wobei offene Kanten in  $\omega$  in rot, offene Kanten in  $\omega^*$  in grün und geschlossene Kanten gepunktet gezeichnet sind.

Wir definieren die folgenden Ereignisse:

$$C := \{\exists \text{ einen offenen Pfad in } \omega \text{ von der linken zur rechten Seite von } G_n\}$$

$$D := \{\exists \text{ einen offenen Pfad in } \omega^* \text{ von der oberen zur unteren Seite von } G_n^*\}$$

Im Beispiel in Abbildung 2b gibt es einen offenen Pfad in  $\omega^*$  (grün) von der oberen zur unteren Seite, aber keinen offenen Pfad in  $\omega$  (rot) von der linken zur rechten Seite.

- (b) Überzeuge Dich davon, dass  $D$  das Komplement von  $C$  ist, d.h.  $\Omega = C \cup D$  und  $C \cap D = \emptyset$ . Kannst Du dies beweisen?
- (c) Zeige zunächst, dass  $P_{\frac{1}{2}}[e^* \text{ ist offen}] = 1/2$  für jede Kante  $e^* \in E_n^*$  gilt. Zeige dann, dass

$$P_{\frac{1}{2}}[C] = P_{\frac{1}{2}}[D].$$

- (d) Schlussfolgere aus den vorherigen Teilaufgaben, dass

$$P_{\frac{1}{2}}[C] = \frac{1}{2}.$$

In dieser Aufgabe hast Du bewiesen, dass die Wahrscheinlichkeit eines offenen Pfades von der linken zur rechten Seite in  $G_n$  gleich  $1/2$  ist und zwar für jede Grösse  $n$  des Graphen. Dies ist eine besondere und wichtige Eigenschaft von Perkolation mit dem Perkolationsparameter  $p = 1/2$ . Wir werden auf dieses Resultat später wieder zurückkommen.

**Lösung 1.1**

- (a) Zuerst wählen wir einen Grundraum, der alle möglichen Ergebnisse umfasst. Bei jeder Durchführung des Zufallsexperiments kann die gezogene Münze gold (g) oder silber (s) sein und beim Wurf kann die Münze auf Kopf (K) oder Zahl (Z) fallen. Das Ergebnis einer Durchführung kann also als ein Element in  $\{(g, K), (g, Z), (s, K), (s, Z)\}$  betrachtet werden. Da wir das Zufallsexperiment zweimal durchführen, ist

$$\Omega = \{(g, K), (g, Z), (s, K), (s, Z)\}^2$$

eine geeignete Wahl als Grundraum. Die Elemente von  $\Omega$  haben die Form  $\omega = ((m_1, x_1), (m_2, x_2))$ , wobei  $m_1, m_2 \in \{g, s\}$  und  $x_1, x_2 \in \{K, Z\}$ . Beispielsweise stellt  $((g, K), (s, K)) \in \Omega$  das Ergebnis dar, dass die erste Münze gold ist und auf Kopf fällt und dass die zweite Münze silber ist und auf Kopf fällt.

Wir wählen die Potenzmenge von  $\Omega$  als  $\sigma$ -Algebra, also  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Insbesondere gilt für alle Ergebnisse  $\omega \in \Omega$ , dass “ $\omega$  tritt ein” ein Ereignis ist, also  $\{\omega\} \in \mathcal{F}$ .

Wir definieren nun ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmass  $\mathbb{P}$  in zwei Schritten. Im ersten Schritt definieren wir die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $\{\omega\}$  (“ $\omega$  tritt ein”) für jedes Ergebnis  $\omega = ((m_1, x_1), (m_2, x_2)) \in \Omega$  durch

$$\mathbb{P}(((m_1, x_1), (m_2, x_2))) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot p_{m_1} \cdot p_{m_2} & \text{falls } x_1 = x_2 = K, \\ \frac{1}{4} \cdot (1 - p_{m_1}) \cdot p_{m_2} & \text{falls } x_1 = Z, x_2 = K, \\ \frac{1}{4} \cdot p_{m_1} \cdot (1 - p_{m_2}) & \text{falls } x_1 = K, x_2 = Z, \\ \frac{1}{4} \cdot (1 - p_{m_1}) \cdot (1 - p_{m_2}) & \text{falls } x_1 = x_2 = Z. \end{cases}$$

Das Ereignis “Die erste Münze ist gold und fällt auf Kopf und die zweite Münze ist silber und fällt auf Kopf” hat also beispielsweise die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{4} \cdot p_g \cdot p_s$ . Der Faktor  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$  kommt daher, dass die erste Münze mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  gold ist und die zweite Münze mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  silber. Im zweiten Schritt definieren wir für ein beliebiges Ereignis  $A \in \mathcal{F}$ ,

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}[\omega].$$

Da  $\Omega$  endlich ist, kann man nun leicht prüfen, dass die Abbildung  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  in der Tat ein Wahrscheinlichkeitsmass auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  ist, insbesondere dass

$$\mathbb{P}[\Omega] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}[\omega] = 1$$

gilt.

- (b) Das Ereignis “Beim ersten Wurf ist die Münze silber” entspricht

$$\begin{aligned} A &= \{((m_1, x_1), (m_2, x_2)) \in \Omega : m_1 = s\} \\ &= \{((s, K), (g, K)), ((s, K), (g, Z)), ((s, K), (s, K)), ((s, K), (s, Z)), \\ &\quad ((s, Z), (g, K)), ((s, Z), (g, Z)), ((s, Z), (s, K)), ((s, Z), (s, Z))\} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

- (c) Das Ereignis “Es wird zweimal Kopf geworfen” entspricht

$$\begin{aligned} B &= \{((m_1, x_1), (m_2, x_2)) \in \Omega : x_1 = x_2 = K\} \\ &= \{((g, K), (g, K)), ((g, K), (s, K)), ((s, K), (g, K)), ((s, K), (s, K))\} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

(d) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[A] &= \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}[\omega] = \sum_{m_2 \in \{g,s\}; x_1, x_2 \in \{K,Z\}} \mathbb{P}[\omega((s, x_1), (m_2, x_2))] \\
 &= \sum_{x_1, x_2 \in \{K,Z\}} \mathbb{P}[\omega((s, x_1), (g, x_2))] + \sum_{x_1, x_2 \in \{K,Z\}} \mathbb{P}[\omega((s, x_1), (s, x_2))] \\
 &= \frac{1}{4} \underbrace{(p_s \cdot p_g + (1-p_s) \cdot p_g + p_s \cdot (1-p_g) + (1-p_s) \cdot (1-p_g))}_{=1} \\
 &\quad + \frac{1}{4} \underbrace{(p_s \cdot p_s + (1-p_s) \cdot p_s + p_s \cdot (1-p_s) + (1-p_s) \cdot (1-p_s))}_{=1} \\
 &= \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[B] &= \sum_{\omega \in B} \mathbb{P}[\omega] = \sum_{m_1, m_2 \in \{g,s\}} \underbrace{\mathbb{P}[\omega((m_1, K), (m_2, K))]}_{=\frac{1}{4} \cdot p_{m_1} \cdot p_{m_2}} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot ((p_g)^2 + 2 \cdot p_s \cdot p_g + (p_s)^2) = \frac{(p_g + p_s)^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Weiterhin gilt  $A \cap B = \{((s, K), (g, K)), ((s, K), (s, K))\} \in \mathcal{F}$ . Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[A \cap B] &= \sum_{\omega \in A \cap B} \mathbb{P}[\omega] = \mathbb{P}[\omega((s, K), (g, K))] + \mathbb{P}[\omega((s, K), (s, K))] \\
 &= \frac{1}{4} \cdot p_s \cdot p_g + \frac{1}{4} \cdot p_s \cdot p_s = \frac{p_s \cdot (p_g + p_s)}{4}
 \end{aligned}$$

### Lösung 1.2

(a) Wir beweisen die De-Morgan Regel, indem wir beide Inklusionen zeigen.

$\subseteq$ : Sei  $\omega \in (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c$ . Für alle  $1 \leq j < \infty$  gilt  $A_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  und somit folgt für alle  $1 \leq j < \infty$ ,

$$\omega \in (A_j)^c.$$

Dies impliziert  $\omega \in \bigcap_{j=1}^{\infty} (A_j)^c$ .

$\supseteq$ : Sei  $\omega \in \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i)^c$ . Dies bedeutet, dass für alle  $1 \leq j < \infty$ ,

$$\omega \in (A_j)^c$$

oder äquivalent  $\omega \notin A_j$ . Dies impliziert  $\omega \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$  und somit  $\omega \in (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)^c$ .

(b) [E4] Wegen [E1] (siehe Definition 1.1 für [E1]-[E3]) gilt  $\Omega \in \mathcal{F}$ . Somit folgt aus [E2], dass

$$\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F}.$$

(c) [E5] Seien  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ . Wegen [E2] gilt auch  $A_1^c, A_2^c, \dots \in \mathcal{F}$ . Somit folgt aus [E3], dass  $\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i)^c \in \mathcal{F}$  gilt. Nun können wir erneut [E2] anwenden und erhalten mit der De-Morgan Regel, dass

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i)^c \right)^c \in \mathcal{F}.$$

- (d) [E6] Seien  $A, B \in \mathcal{F}$ . Wir definieren  $A_1 := A$ ,  $A_2 := B$  und für alle  $i \geq 3$ ,  $A_i = \emptyset$ . Wegen [E3] gilt

$$A \cup B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

- (e) [E7] Seien  $A, B \in \mathcal{F}$ . Wegen [E2] gilt  $A^c, B^c \in \mathcal{F}$ . Aus [E6] folgt nun  $A^c \cup B^c \in \mathcal{F}$ . Aus [E2] folgt somit

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F},$$

wobei wir die De-Morgan Regel für zwei Mengen angewendet haben.

### Lösung 1.3

- (a) [E3] Definiere  $x = \mathbb{P}[\emptyset]$ . Wir wissen bereits, dass  $x \in [0, 1]$ , da  $x$  die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist. Wir definieren nun  $A_1 = A_2 = \dots = \emptyset$  und haben somit

$$\emptyset = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Die Ereignisse  $A_i$  sind disjunkt und somit impliziert die abzählbare Additivität (siehe [E2] in Definition 1.2), dass

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i] = \mathbb{P}[\emptyset].$$

Da  $\mathbb{P}[A_i] = x$  für jedes  $i$  gilt und  $\mathbb{P}[\emptyset] \leq 1$ , erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{\infty} x \leq 1,$$

und somit  $x = 0$ .

- (b) [E4 - Additivität] Definiere  $A_{k+1} = A_{k+2} = \dots = \emptyset$ . Auf diese Weise haben wir

$$A_1 \cup \dots \cup A_k = A_1 \cup \dots \cup A_k \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Da die Ereignisse  $A_i$  paarweise disjunkt sind, können wir die abzählbare Additivität (siehe [E2] in Definition 1.2) wie folgt anwenden:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_k] &= \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \\ &\stackrel{[E2]}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i] \\ &= \mathbb{P}[A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_k] + \underbrace{\sum_{i>k} \mathbb{P}[A_i]}_{=0} \\ &= \mathbb{P}[A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_k] + \underbrace{\sum_{i>k} \mathbb{P}[A_i]}_{=0} \end{aligned}$$

- (c) [E5] Aufgrund der Definition des Komplements haben wir  $\Omega = A \cup A^c$ , und somit

$$1 = \mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}[A \cup A^c].$$

Da die beiden Ereignisse  $A, A^c$  disjunkt sind, impliziert [E4], dass

$$1 = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[A^c].$$

- (d) [E6]
- $A \cup B$
- ist die disjunkte Vereinigung von
- $A$
- und
- $B \setminus A$
- . Aufgrund von [E4] folgt

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B \setminus A]. \quad (1)$$

Also  $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c) = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$ . Somit

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[B \cap A] + \mathbb{P}[B \setminus A],$$

was  $\mathbb{P}[B \setminus A] = \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$  impliziert. Wir können dies in Gleichung (1) einsetzen und erhalten damit das Resultat.

### Lösung 1.4

- (a) Wir stellen zunächst fest, dass der Grundraum
- $\Omega = \{0, 1\}^{E_n}$
- genau
- $2^{|E_n|}$
- Elemente enthält. Da das Wahrscheinlichkeitsmass
- $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}$
- jedem
- $\omega \in \Omega$
- die gleiche Wahrscheinlichkeit zuordnet, erhalten wir

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}[\Omega] = \sum_{\omega \in \Omega} \underbrace{\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}[\omega]}_{=2^{-|E_n|}} = 2^{|E_n|} \cdot 2^{-|E_n|} = 1.$$

Sei nun  $e \in E_n$  eine beliebige Kante. Es gilt

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}[e \text{ ist offen}] = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}[\omega_e = 1] = \sum_{\omega \in \Omega: \omega_e = 1} \underbrace{\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}[\omega]}_{=2^{-|E_n|}} = \underbrace{|\{\omega \in \Omega : \omega_e = 1\}|}_{=2^{|E_n|-1}} \cdot 2^{-|E_n|} = \frac{1}{2}.$$

Wir sehen also, dass jede Kante mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  offen ist. Nachdem in der Vorlesung der Begriff der Unabhängigkeit eingeführt wurde, werden wir auch sehen, dass der Status einer Kante (also offen oder geschlossen) unabhängig ist vom Status aller anderen Kanten.

- (b)
- Schritt 1:**
- $C \cap D = \emptyset$

Wir zeigen dies durch Beweis per Widerspruch. Sei  $\gamma$  ein offener Pfad in  $\omega$  von der linken zur rechten Seite von  $G_n$  und  $\gamma^*$  ein offener Pfad in  $\omega^*$  von der oberen zur unteren Seite von  $G_n^*$ . Es ist klar, dass sich die Pfade  $\gamma$  und  $\gamma^*$  schneiden müssen (siehe auch Abbildung 2a) und insbesondere gibt es zwei Kanten  $e \in \gamma$  und  $e^* \in \gamma^*$ , die sich schneiden. Dies widerspricht aber unserer Annahme, dass die beiden Pfade offen sind, da aber per Definition eine Kante in  $G_n^*$  genau dann offen ist, wenn die Kante  $e \in E_n$ , die sie schneidet, geschlossen ist.

**Schritt 2:**  $\Omega = C \cup D$

Sei  $\omega \in \Omega$  beliebig. Falls es einen offenen Pfad in  $\omega$  von der linken zur rechten Seite in  $G_n$  gibt, so gilt  $\omega \in C$  ein und wir sind fertig. Wir nehmen nun also an, dass es *keinen* offenen Pfad in  $\omega$  von der linken zur rechten Seite in  $G_n$  gibt, also  $\omega \notin C$  und wir wollen zeigen, dass es einen offenen Pfad in der dualen Perkolationskonfiguration  $\omega^*$  von der oberen zur unteren Seite in  $G_n^*$  gibt, also dass  $\omega \in D$ . Hierzu betrachten wir alle Cluster in  $\omega$ , die die linke Seite von  $G_n$  berühren (siehe Abbildung 3). Da es keinen offenen Pfad in  $\omega$  von links nach rechts, berührt keines dieser Cluster die rechte Seite von  $G_n$ . Nun stellen wir fest, dass alle Kanten  $e \in E_n$ , die einen Knoten in einem Cluster mit einem Knoten ausserhalb des Clusters verbinden, zwangsläufig geschlossen sind und somit alle dualen Kanten in  $E_n^*$ , die entlang der Clusterränder (blau-weiße Interfaces) verlaufen, offen sind. Somit gibt es entlang der Clusterränder einen offenen Pfad in  $\omega^*$  (grün) von der oberen zur unteren Seite (siehe Abbildung 3).

Bemerkung: In Schritt 2 haben wir die Idee für einen Beweis skizziert. Diese Idee lässt sich formalisieren und mathematisch rigoros beweisen. Für mehr Details verweisen wir bei Interesse auf den Beweis von Lemma 1 in Kapitel 3 des Buchs "Percolation" von B. Bollobás und O. Riordan (Cambridge University Press, 2006, online via ETH Bibliothek verfügbar).

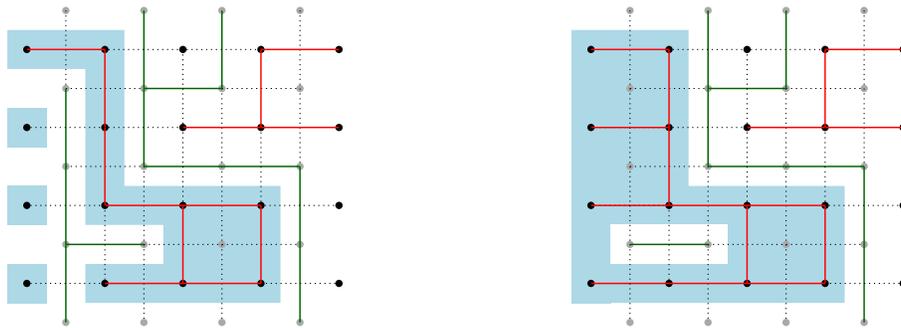


Abbildung 3: Zwei Beispiel von Perkolationskonfigurationen  $\omega$  und den zugehörigen dualen Perkolationskonfigurationen  $\omega^*$ . Die Cluster von  $\omega$ , die die linke Seite von  $G_n$  berühren, sind in blau hervorgehoben.

- (c) Sei  $e^*$  eine beliebige Kante in  $E_n^*$ . Die Kante  $e^*$  schneidet genau eine Kante in  $e \in E_n$  und ist per Definition genau dann offen, wenn die zugehörige Kante  $e \in E$  geschlossen ist. Es gilt also

$$P_{\frac{1}{2}}[e^* \text{ ist offen}] = P_{\frac{1}{2}}[\omega_{e^*}^* = 1] = P_{\frac{1}{2}}[\omega_e = 0] = \frac{1}{2},$$

wobei wir  $P_{\frac{1}{2}}[\omega_e = 0] = 1 - P_{\frac{1}{2}}[\omega_e = 1] = \frac{1}{2}$  aus Teilaufgabe (a) verwendet haben.

Wir wollen nun zeigen, dass  $P_{\frac{1}{2}}[C] = P_{\frac{1}{2}}[D]$ . Beim Blick auf Abbildung 2a sehen wir, dass der Graph  $G_n$  und der duale Graph  $G_n^*$  bis auf eine  $90^\circ$ -Drehung um den Mittelpunkt identisch sind. Der Graph  $G_n$  ist also selbstdual. Weiterhin stellen wir fest, dass für jede duale Perkolationskonfiguration  $\omega^* \in \{0, 1\}^{E_n^*}$ ,

$$\begin{aligned} P_{\frac{1}{2}}[\omega^*] &= P_{\frac{1}{2}}[\{\omega \in \Omega : \omega_e = 1 - \omega_{e^*}^*, \forall \text{ sich schneidenden Kanten } (e, e^*)\}] \\ &= |\{\omega \in \Omega : \omega_e = 1 - \omega_{e^*}^*, \forall \text{ sich schneidenden Kanten } (e, e^*)\}| \cdot 2^{-|E_n|} \\ &= 2^{-|E_n|}, \end{aligned}$$

da es genau eine Perkolationskonfiguration  $\omega \in \Omega$  gibt, sodass  $\omega_e = 1 - \omega_{e^*}^*$  für sich schneidenden Kanten  $e \in E_n$  und  $e^* \in E_n^*$  gilt.

Sei nun  $r : \{0, 1\}^{E_n} \rightarrow \{0, 1\}^{E_n^*}$  die  $90^\circ$ -Drehung um den Mittelpunkt, die eine Perkolationskonfiguration  $\omega \in \Omega$  auf die duale Perkolationskonfiguration in  $\{0, 1\}^{E_n^*}$  abbildet, die der  $90^\circ$ -Drehung von  $\omega$  um den Mittelpunkt entspricht. Man sieht leicht, dass  $r$  eine Bijektion ist.

Weiterhin stellen wir fest, dass  $\omega \in \{0, 1\}^{E_n}$  genau dann einen offenen Pfad von der linken zur rechten Seite von  $G_n$  enthält, wenn  $r(\omega) \in \{0, 1\}^{E_n^*}$  einen offenen Pfad von der oberen zur unteren Seite von  $G_n^*$  enthält. Da  $r$  eine Bijektion ist, folgt

$$\begin{aligned} |C| &= |\{\omega^* : \exists \text{ einen offenen Pfad in } \omega^* \text{ von der oberen zur unteren Seite von } G_n^*\}| \\ &= |D| \end{aligned}$$

und somit

$$P_{\frac{1}{2}}[C] = \sum_{\omega \in C} P_{\frac{1}{2}}[\omega] = |C| \cdot 2^{-|E_n|} = |D| \cdot 2^{-|E_n|} = \sum_{\omega \in D} P_{\frac{1}{2}}[\omega] = P_{\frac{1}{2}}[D].$$

- (d) Aus Teilaufgabe (b) wissen wir, dass  $C = D^c$ . Mittels der Eigenschaft [E5] aus Aufgabe 1.3 folgt

$$P_{\frac{1}{2}}[C] = 1 - P_{\frac{1}{2}}[D].$$

Da wir in Teilaufgabe (c) gezeigt haben, dass  $P_{\frac{1}{2}}[C] = P_{\frac{1}{2}}[D]$  erhalten wir durch Einsetzen in die vorherige Gleichung, dass

$$P_{\frac{1}{2}}[C] = \frac{1}{2}$$

Bemerkung: Einen interessanten Blick auf die Aspekte dieser Aufgabe bietet auch das Brettspiel Hex ([https://en.wikipedia.org/wiki/Hex\\_\(board\\_game\)#Determinacy](https://en.wikipedia.org/wiki/Hex_(board_game)#Determinacy)), das von unabhängig von Piet Hein in 1942 und von John Nash in 1948 erfunden wurde.