Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 13

Abgabe bis Mittwoch (01.06.2022) um 10:15 Uhr

Diese Serie beschäftigt sich mit der Konstruktion von Tests und dem Konzept des P-Werts.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

Aufgabe 13.1 [Likelihood-Quotienten-Test]

(a) Sei $\Theta = [0, \infty)$ und seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, identisch verteilt mit $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\theta)$ unter $\mathbb{P}_\theta$. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = 1$ und die Alternativhypothese $H_A : \theta = 2$. Konstruiere den Likelihood-Quotienten-Test mit Parameter $c > 0$.

(b) Sei $\Theta = [0, 1]$ und seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, identisch verteilt mit $X_1 \sim \mathrm{Geom}(\theta)$ unter $\mathbb{P}_\theta$. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = 1/2$ und die Alternativhypothese $H_A : \theta = 3/4$. Konstruiere den Likelihood-Quotienten-Test mit Parameter $c > 0$.

Aufgabe 13.2 [Neyman–Pearson-Lemma]
Sei $\Theta = (0, \infty)$ und seien $X_1, \ldots, X_{10}$ unabhängig und identisch verteilt mit $X_1 \sim \mathrm{Poisson}(\theta)$ unter $\mathbb{P}_\theta$.

(a) Konstruiere einen Test (T, K) für die Nullhypothese $\Theta_0 = \{1/2\}$ und die Alternativhypothese $\Theta_A = \{2\}$ mit Signifikanzniveau $\alpha = 0.2$, der zudem die folgende Eigenschaft erfüllt: Jeder andere Test (T', K') hat eine grössere Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art oder 2. Art.

(b) Bestimme die Macht des in (a) konstruierten Tests.

(c) Begründe, weshalb der in (a) konstruierte Test die gewünschte Eigenschaft erfüllt.

Hinweis: Verwende, dass $X_1 + \ldots + X_{10} \sim \mathit{Poisson}(10\theta)$ *unter* $\mathbb{P}_\theta$.

Aufgabe 13.3 [Zweiseitiger z-Test]
Die durchschnittliche Fahrzeit von Zürich nach Bellinzona mit einem Intercity-Zug beträgt 146 Minuten. Mit dem Cisalpino werden die folgenden Zeiten gemessen:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
152	145	141	137	145	146	139	147	138

Wir nehmen an, dass diese Werte Realisierungen einer u.i.v. Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ sind mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei μ ein unbekannter Parameter und $\sigma^2 = 9$ ist. Führen Sie einen geeigneten Test durch, um auf dem 5%-Niveau festzustellen, ob die mittlere Fahrzeit des Cisalpino von jener des Intercity abweicht.

Aufgabe 13.4 [P-Wert]
Sei $H_0 : \theta = \theta_0$ eine einfache Nullhypothese. Wir nehmen an, dass die Teststatistik T eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f_T unter $\mathbb{P}_{\theta_0}$ ist und betrachten die geordnete Familie von Tests

$$(T, K_t)_{t \geq 0},$$

wobei $K_t := (t, +\infty)$. Zeige, dass der P-Wert $G(T)$ gleichverteilt ist auf $[0, 1]$ unter $\mathbb{P}_{\theta_0}$.

Aufgabe 13.5 [z-Test und P-Wert]
Eine Klimaanlage schafft es, die Raumtemperatur bis auf eine Standardabweichung σ von 0.5 Grad Celsius konstant zu halten. Die angestrebte Raumtemperatur beträgt 20.00 Grad Celsius. An zehn aufeinanderfolgenden Tagen wurden die folgenden Temperaturen gemessen:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
20.71	19.76	20.56	21.39	21.00	19.67	20.92	20.31	20.39	20.72

Wir nehmen an, dass die gemessenen Temperaturen unabhängig voneinander und identisch normalverteilt sind.

(a) Führe einen geeigneten Test auf dem 5%-Niveau durch, um zu beurteilen, ob die Klimaanlage wirklich auf den Sollwert von 20.00 Grad geeicht ist.

(b) Berechne den realisierten P-Wert.

Lösung 13.1

(a) Die Dichte einer $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilten Zufallsvariable ist gegeben durch $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$. Da $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. sind mit $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\theta)$ unter $\mathbb{P}_\theta$, ergibt sich die gemeinsame Dichte als Produkt der einzelnen Dichten. Somit erhalten wir für $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ den Likelihood-Quotienten

$$R(x_1, \ldots, x_n) = \frac{L(x_1, \ldots, x_n; 2)}{L(x_1, \ldots, x_n; 1)} = \frac{2^n e^{-2(x_1 + \ldots + x_n)}}{e^{-(x_1 + \ldots + x_n)}} = 2^n e^{-(x_1 + \ldots + x_n)}.$$

Falls $x_i < 0$ für ein $1 \leq i \leq n$, erhält man $R(x_1, \ldots, x_n) = +\infty$. Der Likelihood-Quotienten Test mit Paramter c ist also der Test (T, K) mit

$$T = R(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{und} \quad K = (c, \infty].$$

Für Realisierungen $x_1, \ldots, x_n$ wird die Nullhypothese also verworfen, falls

$$2^n e^{-(x_1 + \ldots + x_n)} > c \iff n \cdot \log(2) - \log(c) > x_1 + \ldots + x_n.$$

(b) Für eine $\mathrm{Geom}(p)$-verteilte Zufallsvariable X gilt $\mathbb{P}[X = k] = p \cdot (1-p)^{k-1}$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Da $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. sind mit $X_1 \sim \mathrm{Geom}(\theta)$ unter $\mathbb{P}_\theta$, erhalten wir für $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ den Likelihood-Quotienten

$$R(x_1, \ldots, x_n) = \frac{L(x_1, \ldots, x_n; 3/4)}{L(x_1, \ldots, x_n; 1/2)} = \frac{(3/4)^n (1/4)^{x_1 + \ldots + x_n - n}}{(1/2)^n (1/2)^{x_1 + \ldots + x_n - n}} = \frac{3^n}{2^{x_1 + \ldots + x_n}}.$$

Falls $x_i \notin \mathbb{N} \setminus \{0\}$ für ein $1 \leq i \leq n$, erhält man $R(x_1, \ldots, x_n) = +\infty$. Der Likelihood-Quotienten Test mit Paramter c ist also der Test (T, K) mit

$$T = R(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{und} \quad K = (c, \infty].$$

Für Realisierungen $x_1, \ldots, x_n$ wird die Nullhypothese also verworfen, falls

$$\frac{3^n}{2^{x_1 + \ldots + x_n}} > c \iff n \cdot \log_2(3) - \log_2(c) > x_1 + \ldots + x_n.$$

Lösung 13.2

(a) Wir wenden das Neyman-Pearson-Lemma (Theorem 3.7) an. Der Likelihood-Quotient ist

$$\begin{aligned} R(x_1, \ldots, x_{10}) = \frac{L(x_1, \ldots, x_{10}; \theta_A)}{L(x_1, \ldots, x_{10}; \theta_0)} &= \frac{e^{-10\theta_A} \prod_{i=1}^{10} \frac{\theta_A^{x_i}}{x_i!}}{e^{-10\theta_0} \prod_{i=1}^{10} \frac{\theta_0^{x_i}}{x_i!}} \\ &= e^{-10(\theta_A - \theta_0)} \left(\frac{\theta_A}{\theta_0} \right)^{\sum_{i=1}^{10} x_i}. \end{aligned}$$

Statt des komplizierten Likelihood-Quotienten, können wir als Teststatistik auch

$$T := \sum_{i=1}^{10} X_i$$

wählen; wegen $\theta_A > \theta_0$ ist nämlich R gross genau dann, wenn T gross ist. Wir bestimmen nun das kleinste $c \in \mathbb{N}_0$ so, dass für $K = (c, \infty)$

$$\mathbb{P}_{\theta_0}[T \in K] = \mathbb{P}_{1/2}[T > c] \leq 0.2$$

gilt. Für jedes $\theta \in \Theta$ ist $T \sim \text{Poisson}(10\theta)$ unter $\mathbb{P}_\theta$, da Summen von unabhängigen Poisson-verteilten Zufallsvariablen wieder Poisson-verteilt sind (siehe Hinweis). Wegen $T \sim \text{Poisson}(5)$ unter $\mathbb{P}_{1/2}$ ist also

$$\mathbb{P}_{1/2}[T > c] = 1 - \mathbb{P}_{1/2}[T \leq c] = 1 - \sum_{k=0}^{c} \mathbb{P}_{1/2}[T = k] = 1 - \sum_{k=0}^{c} e^{-5}\frac{5^k}{k!},$$

und wir erhalten $c = 7$.

(b) Für den in (a) konstruierten Likelihood-Quotienten Test mit Paramter $c = 7$ bestimmen wir die Macht

$$\beta(\theta_A) = \beta(2) = \mathbb{P}_{\theta_A}[T \in K] = \mathbb{P}_2[T > 7] = 1 - \sum_{k=0}^{7} e^{-20}\frac{20^k}{k!} = 0.9992,$$

wobei wir verwendet haben, dass $T \sim \text{Poisson}(20)$ unter $\mathbb{P}_2$.

(c) Sei nun (T', K') ein anderer Test. Falls $\mathbb{P}_{\theta_0}[T' \in K'] > \mathbb{P}_{\theta_0}[T \in K]$, so ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art bei (T', K') grösser. Andererseits gilt für den Fall $\mathbb{P}_{\theta_0}[T' \in K'] \leq \mathbb{P}_{\theta_0}[T \in K]$ mit dem Neyman-Pearson-Lemma, dass die Macht von (T', K') kleiner ist als die von (T, K), das heisst, dass (T', K') eine grössere Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art hat.

Lösung 13.3
Da die Varianz $\sigma^2 = 9$ bekannt ist, liegt es nahe, in diesem Fall einen (zweiseitigen) z-Test durchzuführen. Wir möchten also die Nullhypothese $H_0 : \mu = \mu_0 = 146$ gegen die Alternativhypothese $H_A : \mu \neq \mu_0$ testen und dabei die Teststatistik

$$T = \frac{\overline{X}_9 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{9}}$$

verwenden (siehe erstes Beispiel im Abschnitt 3.5). Unter $\mathbb{P}_{\mu_0}$ ist $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$, und den kritischen Bereich wählen wir von der Form $K_{\neq} = (-\infty, c_{\neq}) \cup (c_{\neq}, \infty)$. Wir verwerfen also H_0, falls $|T| > c_{\neq}$ für ein zu bestimmendes $c_{\neq}$ ist. Da wir auf dem 5%-Niveau testen möchten, wählen wir $c_{\neq}$ so, dass

$$0.05 = \alpha = \mathbb{P}_{\mu_0}[T \in K_{\neq}] = 2\big(1 - \Phi(c_{\neq})\big)$$

gilt. Das ergibt den Wert $c_{\neq} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = z_{0.975} = 1.96$. Der realisierte Wert der Teststatistik T ist

$$T(\omega) = t(x_1, \ldots, x_n) = -2.67.$$

Wegen $|T(\omega)| > 1.96$ verwerfen wir also die Hypothese, dass die mittlere Fahrzeit des Cisalpino von jener des Intercity nicht abweicht. Würden wir stattdessen die Alternative $H'_A : \mu < \mu_0$ testen, so wäre $K_< = (-\infty, c_<)$ mit $c_< = z_{0.05} = -z_{0.95} = -1.645$. Wegen $T(\omega) \in K_<$ wird auch hier die Hypothese verworfen; die Daten weisen also darauf hin (aber sie beweisen nicht), dass der Cisalpino im Mittel eine kürzere Fahrzeit hat.

Lösung 13.4 Um zu zeigen, dass der P-Wert unter $\mathbb{P}_{\theta_0}$ gleichverteilt ist auf $[0, 1]$ können wir auf unterschiedliche Weise vorgehen.

Option 1: Dichte

In diesem Fall wollen wir zeigen, dass der P-Wert $G(T)$ die Dichte $f_G(x) = \mathbb{1}_{x\in[0,1]}$ hat (unter

$\mathbb{P}_{\theta_0}$). Nach Annahme ist T stetig und wir schreiben f_T für die Dichte (unter $\mathbb{P}_{\theta_0}$). Für $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und beschränkt gilt

$$\mathbb{E}_{\theta_0}[\phi(G(T))] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(G(t)) f_T(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\mathbb{P}_{\theta_0}[T > t]\right) f_T(t) dt = \int_0^1 \phi(x) dx,$$

wobei wir den Variablenwechsel $x = G(t)$ verwendet haben. Hierbei gilt $dx = -f_T(t)dt$, da $G(t) = \mathbb{P}_{\theta_0}[T > t] = 1 - \mathbb{P}_{\theta_0}[T \leq t]$ und T stetig ist. Aus der Charakterisierung mittels Dichte (Proposition 4.16) folgt die Aussage.

Option 2: Verteilungsfunktion

In diesem Fall wollen wir zeigen, dass

$$\mathbb{P}_{\theta_0}[G(T) \leq a] = \begin{cases} 0 & \text{für } a < 0, \\ a & \text{für } a \in [0,1], \\ 1 & \text{für } a > 1. \end{cases}$$

Da $K_t = (t, \infty)$ ist die Funktion $G : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ gegeben durch $G(t) = \mathbb{P}_{\theta_0}[T > t] = 1 - \mathbb{P}_{\theta_0}[T \leq t]$, also monoton fallend und stetig, da T stetig ist. Ausserdem nimmt G Werte in $(0,1)$ an. Wir betrachten die (verallgemeinerte) Inverse von G, bezeichnet mit H und erhalten

$$\mathbb{P}_{\theta_0}[G(T) \leq a] = \mathbb{P}_{\theta_0}[H(G(T)) \geq H(a)] = \mathbb{P}_{\theta_0}[T \geq H(a)] = \mathbb{P}_{\theta_0}[T > H(a)] = G(H(a)) = a.$$

Im ersten Schritt dreht sich die Ungleichung um, da H ebenfalls monoton fallend ist.

Lösung 13.5

(a) Sei $X_1, \ldots, X_{10}$ die Stichprobe, also die gemessenen Temperaturen. Unter den gemachten Annahmen sind $X_1, \ldots, X_{10}$ unabhängig und je $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt unter $\mathbb{P}_\mu$, wobei μ ein unbekannter Parameter und $\sigma = 0.5$ ist. Als Nullhypothese und Alternativhypothese wählen wir

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 20 \quad \text{und} \quad H_A : \mu \neq \mu_0.$$

Unter den gemachten Annahmen ist es naheliegend einen z-Test durchzuführen (siehe Beispiele im Abschnitt 3.5). Wir wählen als Teststatistik also

$$T = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X}_{10} - 20}{0.5/\sqrt{10}}.$$

Unter H_0 gilt $T \sim \mathcal{N}(0,1)$, und wir wählen als Verwerfungsbereich $K_{\neq} = (-\infty, -c_{\neq}) \cup (c_{\neq}, \infty)$. Wir verwerfen also H_0, falls $|T| > c_{\neq}$ für ein zu bestimmendes $c_{\neq}$ ist. Da wir auf dem 5%-Niveau testen möchten, wählen wir $c_{\neq}$ so, dass

$$0.05 = \alpha = P_{\mu_0}[T \in K_{\neq}] = 2\big(1 - \Phi(c_{\neq})\big)$$

gilt. Das ergibt den Wert $c_{\neq} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = z_{0.975} = 1.96$. Der realisierte Wert der Teststatistik T ist

$$T(\omega) = t(x_1, \ldots, x_{10}) = 3.4342.$$

Wegen $|T(\omega)| > 1.96$ verwerfen wir also die Hypothese, dass die Klimaanlage die angestrebte Raumtemperatur von 20.00 Grad Celsius im Mittel erreicht.

(b) Der realisierte P-Wert ist

$$G(T(\omega)) = \mathbb{P}_{\mu_0}[|T| > 3.43] = 2\mathbb{P}_{\mu_0}[T > 3.43] = 2\big(1 - \Phi(3.43)\big) \approx 0.0006.$$