Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 2

Abgabe bis Mittwoch (09.03.2022) um 10:15 Uhr

In dieser Serie betrachten wir Anwendungen einer sehr wichtigen Ungleichung, die Union Bound genannt wird. Aufgabe 2 behandelt bedingte Wahrscheinlichkeiten und in den Aufgaben 3-4 beschäftigen wir uns mit dem zentralen Konzept der Zufallsvariable und deren Verteilungsfunktion.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

Aufgabe 2.1 [Union Bound I]
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(B_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge von fast sicher eintretenden Ereignissen, d.h. $\mathbb{P}[B_i] = 1, \forall i \geq 1$. Zeige, dass

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right] = 1,$$

d.h. fast sicher treten *alle* (unendlich vielen) Ereignisse ein.

Aufgabe 2.2 [Bedingte Wahrscheinlichkeiten: Federer vs. Nadal]
Wir analysieren einen Tennismatch von Roger Federer gegen Rafael Nadal. Der Match wird nach der Regel „best of 3" gespielt; Sieger ist also, wer zuerst zwei Sätze gewinnt (es werden also maximal 3 Sätze gespielt). Wir nehmen an, dass Federer jeden einzelnen Satz – unabhängig von den anderen – mit Wahrscheinlichkeit $p = 1/3$ gewinnt. Mit A bezeichnen wir das Ereignis, dass Federer den ersten Satz gewinnt, und B bezeichne das Ereignis, dass Federer den Match (also zwei Sätze) gewinnt.

(a) Drücke $A \cup B$, $A^c \cap B$, $A \cap B^c$ und $A \setminus B$ in Worten aus. Berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P[B^c|A]$, $P[B|A]$ und $P[B|A^c]$.

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Federer den Match gewinnt.

(c) Berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P[A|B]$ und $P[A|B^c]$ mit Hilfe des Satzes von Bayes.

Aufgabe 2.3 [σ-Algebren & Zufallsvariablen]
Bei einem Zufallsexperiment werden ein grüner und ein blauer Würfel gleichzeitig geworfen. Wir wählen den Grundraum $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$. Wir betrachten zwei verschiedene σ-Algebren:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &:= \mathcal{P}(\Omega)\\ \mathcal{F}_{sym} &:= \{A \subseteq \Omega : \forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega, (\omega_1, \omega_2) \in A \iff (\omega_2, \omega_1) \in A\}\end{aligned}$$

Die σ-Algebra $\mathcal{F}$ enthält alle Teilmengen von Ω. In diesem Fall können wir also jedes Ergebnis des Zufallsexperiments beobachten, z.B. dass der blaue Würfel die Augenzahl 3 zeigt und der grüne Würfel die Augenzahl 5. Die σ-Algebra $\mathcal{F}_{sym}$ enthält nur symmetrische Teilmengen von Ω (mit Blick auf das Vertauschen der beiden Würfel). In diesem Fall können wir uns vorstellen, dass wir eine Brille tragen, die es uns nicht erlaubt, die Farben der Würfel zu erkennen. Wir können also beispielsweise beobachten, dass ein Würfel die Augenzahl 3 zeigt und der andere die Augenzahl 5, aber nicht dass der Würfel mit der Augenzahl 3 blau ist.

(a) Zeige, dass $\mathcal{F}_{sym}$ eine σ-Algebra ist.
Hinweis: Überprüfe hierzu, dass die drei Eigenschaften [E1]–[E3] aus Definition 1.1 erfüllt sind.

(b) Wir betrachten zwei Teilmengen von Ω:

$$A := \text{"Ein Würfel zeigt die Augenzahl 3"},$$
$$B := \text{"Der blaue Würfel zeigt die Augenzahl 3"}.$$

Zeige, dass $A \in \mathcal{F}_{sym}$, aber $B \notin \mathcal{F}_{sym}$.

(c) Wir betrachten die Abbildungen

$$X : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 \end{cases} \qquad \text{"Augenzahl des blauen Würfels"}$$
$$S : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 + \omega_2 \end{cases} \qquad \text{"Augensumme der beiden Würfel"}$$

Zeige, dass X *keine* Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}_{sym})$ ist.
Zeige, dass S *eine* Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}_{sym})$ ist.

Aufgabe 2.4 [Verteilungsfunktion: Würfelwurf]
Bei einem Zufallsexperiment werden ein grüner und ein blauer Würfel gleichzeitig geworfen. Wir wählen den Grundraum $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$, die σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und das Wahrscheinlichkeitsmass $\mathbb{P}$ definiert durch

$$\mathbb{P}[(\omega_1, \omega_2)] = 1/36, \quad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega.$$

Als Zufallsvariablen betrachten wir

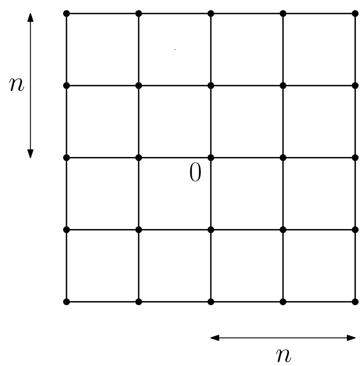
$$X : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 \end{cases} \qquad \text{"Augenzahl des blauen Würfels"}$$
$$X^2 : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto (\omega_1)^2 \end{cases} \qquad \text{"Das Quadrat der Augenzahl des blauen Würfels"}$$
$$S : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 + \omega_2 \end{cases} \qquad \text{"Augensumme der beiden Würfel"}$$

(a) Zeichne die Verteilungsfunktion von X.

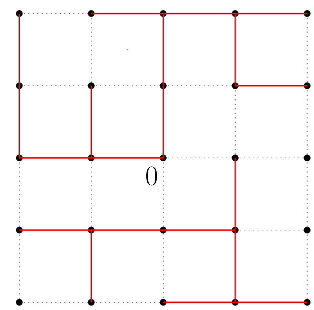
(b) Zeichne die Verteilungsfunktion von X^2.

(c) Zeichne die Verteilungsfunktion von S.

Aufgabe 2.5 [Union Bound II: Perkolation auf endlichen Boxen in $\mathbb{Z}^2$]
Sei $n \geq 1$. Wir betrachten in dieser Aufgabe Perkolation auf dem endlichen Graphen $G_n = (V_n, E_n)$,



(a) Graph $G_n = (V_n, E_n)$ für $n = 2$



(b) Beispiel einer Perkolationskonfiguration ω

Abbildung 1

der in Abbildung 1a dargestellt ist. Als Grundraum wählen wir $\Omega = \{0,1\}^{E_n}$ mit der σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und ein Elementarereignis $\omega = (\omega_e)_{e \in E_n} \in \Omega$ nennen wir eine *Perkolationskonfiguration*. Während wir in Aufgabe 1.4 die Besonderheit von Perkolation beim Parameter $p = 1/2$ analysiert haben (auf einem ähnlichen Graphen), erlauben wir nun einen beliebigen Parameter $p \in [0,1]$. Wir definieren das Wahrscheinlichkeitsmass P_p durch

$$\mathrm{P}_p(\omega) := p^{o(\omega)} \cdot (1-p)^{|E_n| - o(\omega)},$$

wobei $o(\omega) := |\{e \in \mathrm{E}_n : \omega_e = 1\}|$ die Anzahl offener Kanten in ω ist. Für $p = 1/2$ entspricht dies genau der Definition aus Aufgabe 1.4. Für jede Kante $e \in E_n$ definieren wir die Zufallsvariable

$$X_e : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R}, \\ \omega & \mapsto \omega_e. \end{cases}$$

Wir haben $X_e = 1$, wenn die Kante e offen ist und $X_e = 0$, wenn die Kante e geschlossen ist.

(a) Was ist die Verteilungsfunktion von X_e?

(b) Sei $m \geq 1$. Zeige, dass

$$|\{\gamma : \gamma \text{ ist ein Pfad der Länge } m, \text{ der bei 0 startet}\}| \leq 4^m.$$

(c) Wir sagen, dass ein Pfad γ offen ist, falls $X_e = 1$ für alle $e \in \gamma$ gilt. Zeige, dass

$$\mathrm{P}_p\left[\exists \text{ einen offenen Pfad } \gamma \text{ der Länge } m, \text{ der bei 0 startet}\right] \leq (4p)^m.$$

Hinweis: Zeige zuerst, dass für einen Pfad γ der Länge m gilt: $\mathrm{P}_p[\gamma \textit{ ist offen}] = p^m$.

(d) *[Bonus]* Zeige, dass für $p < 1/4$,

$$\mathrm{P}_p[\exists \text{ einen offenen Pfad von der linken zur rechten Seite von } G_n] \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Für $p < 1/4$ geht die Wahrscheinlichkeit eines offenen Pfads von der linken zur rechten Seite in einer Box der Grösse n also gegen 0 für $n \to \infty$. Dies steht in starkem Kontrast zum Verhalten beim Perkolationsparameter $p = 1/2$: Aus Aufgabe 1.4 folgt, dass die Wahrscheinlichkeit eines offenen Pfads von der linken zur rechten Seite von $G_n \geq 1/2$ ist für jede Grösse n.

(e) *[Bonus]* Zeige, dass für $p > 3/4$,

$$\mathrm{P}_p[\exists \text{ einen offenen Pfad von der linken zur rechten Seite von } G_n] \xrightarrow{n \to \infty} 1.$$

Lösung 2.1 [Union Bound I]

Aufgrund der De-Morgan Regel (Aufgabe 1.2 (a)) und [E5] des Wahrscheinlichkeitsmasses gilt

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i)^{\mathsf{c}}\right].$$

Mithilfe des Union-Bound erhalten wir

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i)^{\mathsf{c}}\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[(B_i)^{\mathsf{c}}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} 1 - \underbrace{\mathbb{P}[B_i]}_{=1} = 0,$$

da die Ereignisse B_i fast sicher eintreten. Durch Einsetzen in die erste Gleichung erhalten wir $\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right] \geq 1$ und somit das gewünschte Resultat, da $\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right] \leq \mathbb{P}[\Omega] = 1$.

Lösung 2.2

(a) $A \cup B =$ „Federer gewinnt den ersten Satz oder gewinnt den Match."
$A^c \cap B =$ „Federer verliert den ersten Satz und gewinnt den Match."
$A \cap B^c = A \setminus B =$ „Federer gewinnt den ersten Satz und verliert den Match."

Zur Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten führen wir zusätzlich die Ereignisse $S_i =$ „Federer gewinnt den i-ten Satz", $i = 1, 2, 3$, ein. Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass $\mathbb{P}[S_i] = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$, und dass S_1, S_2, S_3 unabhängig sind. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[B^c \mid A] &= \frac{\mathbb{P}[B^c \cap A]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\mathbb{P}[S_1 \cap S_2^c \cap S_3^c]}{\mathbb{P}[S_1]} \overset{\text{Unabh.}}{=} \frac{\mathbb{P}[S_1]\mathbb{P}[S_2^c]\mathbb{P}[S_3^c]}{\mathbb{P}[S_1]} \\
&= \mathbb{P}[S_2^c]\mathbb{P}[S_3^c] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \\
\mathbb{P}[B \mid A] &= 1 - \mathbb{P}[B^c \mid A] = \frac{5}{9}, \\
\mathbb{P}[B \mid A^c] &= \frac{\mathbb{P}[B \cap A^c]}{\mathbb{P}[A^c]} = \frac{\mathbb{P}[S_1^c \cap S_2 \cap S_3]}{\mathbb{P}[S_1^c]} \overset{\text{Unabh.}}{=} \mathbb{P}[S_2]\mathbb{P}[S_3] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

(b) Wir berechnen $\mathbb{P}[B]$ mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[B|A]\,\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B|A^c]\,\mathbb{P}[A^c] = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{27}.$$

Alternativ können wir B schreiben als

$$B = (S_1 \cap S_2) \sqcup (S_1 \cap S_2^c \cap S_3) \sqcup (S_1^c \cap S_2 \cap S_3)$$

und erhalten dann mit Unabhängigkeit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[B] &= \mathbb{P}[S_1 \cap S_2] + \mathbb{P}[S_1 \cap S_2^c \cap S_3] + \mathbb{P}[S_1^c \cap S_2 \cap S_3] \\
&= \mathbb{P}[S_1]\mathbb{P}[S_2] + \mathbb{P}[S_1]\mathbb{P}[S_2^c]\mathbb{P}[S_3] + \mathbb{P}[S_1^c]\mathbb{P}[S_2]\mathbb{P}[S_3] \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{7}{27}.
\end{aligned}$$

(c) $A|B =$ „Federer hat den ersten Satz gewonnen, gegeben, dass er den Match gewonnen hat."
$A|B^c =$ „Federer hat den ersten Satz gewonnen, gegeben, dass er den Match verloren hat."
$\mathbb{P}[A|B]$ und $\mathbb{P}[A|B^c]$ berechnen wir mit dem Satz von Bayes:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[B|A]\,\mathbb{P}[A]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\frac{5}{9} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{27}} = \frac{\frac{5}{27}}{\frac{7}{27}} = \frac{5}{7}$$

und

$$\mathbb{P}[A|B^c] = \frac{\mathbb{P}[B^c|A]\,\mathbb{P}[A]}{\mathbb{P}[B^c]} = \frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{20}{27}} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{20}{27}} = \frac{1}{5}.$$

Lösung 2.3

(a) Wir überprüfen die Eigenschaften [E1]-[E3] aus der Definition einer σ-Algebra.

[E1] Nachdem für alle $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ auch $(\omega_2, \omega_1) \in \Omega$ gilt, folgt direkt, dass $\Omega \in \mathcal{F}_{sym}$.

[E2] Sei nun $A \in \mathcal{F}_{sym}$. Somit gilt für jedes $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$

$$(\omega_1, \omega_2) \in A \iff (\omega_2, \omega_1) \in A,$$

was äquivalent ist zu

$$(\omega_1, \omega_2) \in A^{\mathsf{c}} \iff (\omega_2, \omega_1) \in A^{\mathsf{c}}.$$

Hieraus folgt $A^{\mathsf{c}} \in F_{sym}$.

[E3] Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_{sym}$. Für jedes $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ gilt

$$(\omega_1, \omega_2) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \iff \exists i : (\omega_1, \omega_2) \in A_i \overset{A_i \in \mathcal{F}_{sym}}{\iff} \exists i : (\omega_2, \omega_1) \in A_i \iff (\omega_2, \omega_1) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

und somit folgt, dass $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_{sym}$.

(b) Im Folgenden steht $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ für das Ergebnis, dass der grüne Würfel die Augenzahl ω_1 zeigt und der blaue Würfel die Augenzahl ω_2. Somit ist

$$A = \{(3, i) : i \in \{1, \ldots, 6\}\} \cup \{(i, 3) : i \in \{1, \ldots, 6\}\}$$

und es gilt $(\omega_1, \omega_2) \in A \iff (\omega_2, \omega_1) \in A$ für jedes $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, also $A \in \mathcal{F}_{sym}$. Weiterhin ist

$$B = \{(i, 3) : i \in \{1, \ldots, 6\}\}$$

und wir stellen fest, dass $(1, 3) \in B$, aber $(3, 1) \notin B$. Somit gilt $B \notin \mathcal{F}_{sym}$.

(c) X: Wir überprüfen die Definition einer Zufallsvariable (siehe Def. 2.1) und sehen, dass

$$\big\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : X\big((\omega_1, \omega_2)\big) \leq 1\big\} = \{(i, 1) : i \in \{1, \ldots, 6\}\} \notin \mathcal{F}_{sym},$$

wobei wir analog zu (b) festgestellt haben, dass die Menge nicht in $\mathcal{F}_{sym}$ ist, da sie das Ergebnis $(2, 1)$ enthält, aber nicht das Ergebnis $(1, 2)$. Somit ist X keine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}_{sym})$.

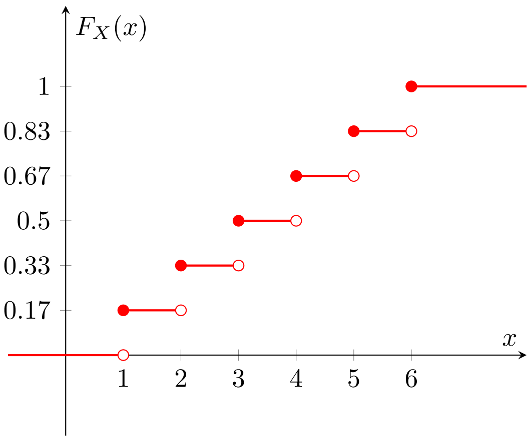
S: Wir überprüfen wieder die Definition einer Zufallsvariable (siehe Def. 2.1) und sehen, dass für $a \in \mathbb{R}$

$$\big\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : S\big((\omega_1, \omega_2)\big) \leq a\big\} = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : \omega_1 + \omega_2 \leq a\} \in \mathcal{F}_{sym},$$

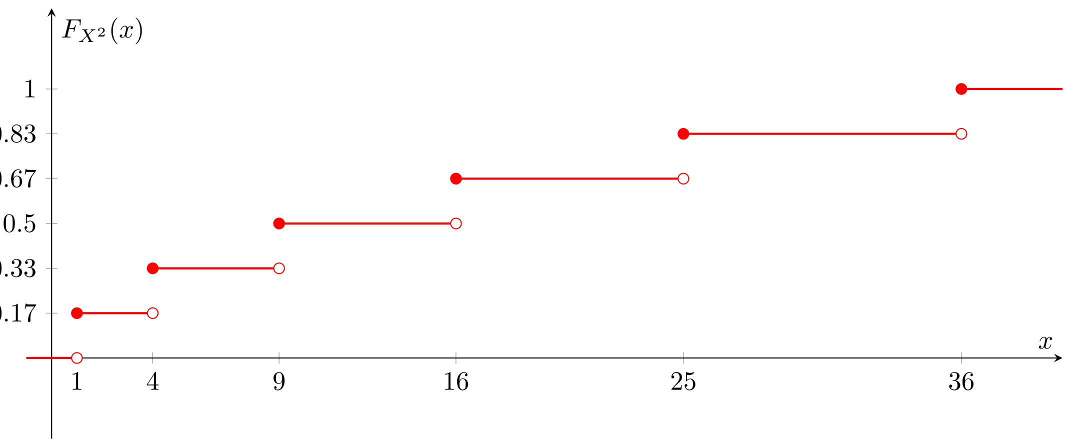
wobei wir genutzt haben, dass $\omega_1 + \omega_2 \leq a \iff \omega_2 + \omega_1 \leq a$. Somit ist S eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}_{sym})$.

Lösung 2.4 *Vorbemerkung: Anders als in Aufgabe 1.3 (c) betrachten wir nun die σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Insbesondere sind X, X^2 und S Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F})$.*

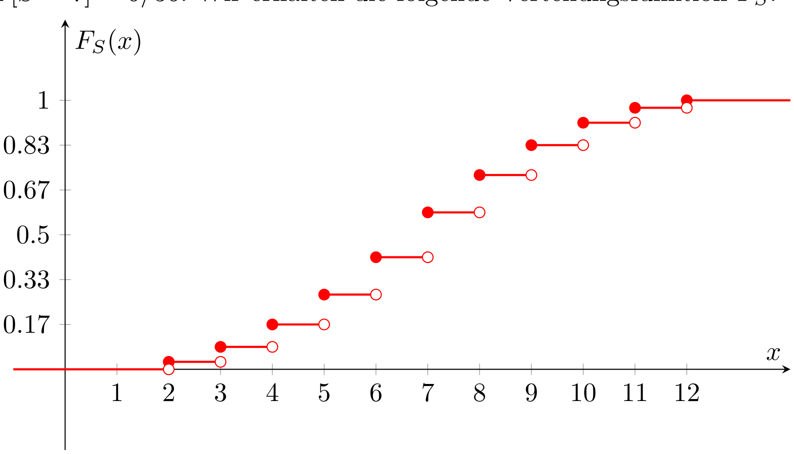
(a) Wir stellen zuerst fest, dass $\mathbb{P}[X \le i] = i/6$ für $i \in \{1, \dots, 6\}$. Wir erhalten die folgende Verteilungsfunktion F_X:



(b) Wir stellen zuerst fest, dass $\mathbb{P}[X \le i^2] = i/6$ für $i \in \{1, \dots, 6\}$. Wir erhalten die folgende Verteilungsfunktion F_{X^2}:



(c) Wir stellen zuerst fest, dass $\mathbb{P}[S = 2] = \mathbb{P}[S = 12] = 1/36$, $\mathbb{P}[S = 3] = \mathbb{P}[S = 11] = 2/36$, $\mathbb{P}[S = 4] = \mathbb{P}[S = 10] = 3/36$, $\mathbb{P}[S = 5] = \mathbb{P}[S = 9] = 4/36$, $\mathbb{P}[S = 6] = \mathbb{P}[S = 8] = 5/36$ und $\mathbb{P}[S = 7] = 6/36$. Wir erhalten die folgende Verteilungsfunktion F_S:



Lösung 2.5

(a) Sei $e \in E_n$ eine beliebige Kante. Die Verteilungsfunktion $F_{X_e} : \mathbb{R} \to [0,1]$ ist gegeben durch

$$F_{X_e}(a) = \mathrm{P}_p[X_e \leq a] = \begin{cases} 0 & \text{für } a < 0, \\ 1-p & \text{für } 0 \leq a < 1, \\ 1 & \text{für } a \geq 1. \end{cases}$$

(b) Wir stellen zunächst fest, dass jeder Knoten $v \in V_n$ im Graph G_n höchstens 4 benachbarte Knoten hat, also $\deg(v) \leq 4$. Die Aussage beweisen wir nun per Induktion.
Induktionsanfang($m = 1$): Wir sehen, dass

$$|\{\gamma : \gamma \text{ ist ein Pfad der Länge } 1, \text{ der bei } 0 \text{ startet}\}| \leq 4,$$

da der Pfad entweder zum linken, rechten, oberen oder unteren Nachbarn von 0 gehen muss.
Induktionshypothese: Es gilt

$$|\{\gamma : \gamma \text{ ist ein Pfad der Länge } m, \text{ der bei } 0 \text{ startet}\}| \leq 4^m.$$

Induktionsschritt ($m \mapsto m+1$): Sei γ ein Pfad der Länge m, der bei 0 startet. Wir bezeichnen den letzten Knoten von γ als $\tilde{v}$. Da $\deg(\tilde{v}) \leq 4$, gibt es höchstens 4 Pfade der Länge $m+1$, die bei 0 starten, und deren erste m Kanten mit γ übereinstimmen. Es folgt

$$\begin{aligned} &|\{\gamma' : \gamma' \text{ ist ein Pfad der Länge } m+1, \text{ der bei } 0 \text{ startet}\}| \\ &\leq 4 \cdot |\{\gamma : \gamma \text{ ist ein Pfad der Länge } m, \text{ der bei } 0 \text{ startet}\}| \\ &\leq 4 \cdot 4^m = 4^{m+1}, \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Ungleichung die Induktionshypothese verwendet haben.

(c) Sei γ ein Pfad der Länge m. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_p[\gamma \text{ ist offen}] &= \mathrm{P}_p\left[X_e = 1, \forall e \in \gamma\right] = \mathrm{P}_p\left[\omega_e = 1, \forall e \in \gamma\right] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega:\, \forall e \in \gamma, \omega_e = 1} p^{o(\omega)} \cdot (1-p)^{|E_n| - o(\omega)} \\ &= p^m \cdot (p + (1-p))^{|E_n| - m} = p^m. \end{aligned}$$

Mit dem Union Bound erhalten wir

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}_p\left[\exists \text{ einen offenen Pfad } \gamma \text{ der Länge } m, \text{ der bei } 0 \text{ startet}\right] \\ &\leq \sum_{\gamma:\, \gamma \text{ ist ein Pfad der Länge } m, \text{ der bei } 0 \text{ startet}} \underbrace{\mathrm{P}_p[\gamma \text{ ist offen}]}_{=p^m} \\ &\leq |\{\gamma : \gamma \text{ ist ein Pfad der Länge } m, \text{ der bei } 0 \text{ startet}\}| \cdot p^m \\ &\leq 4^m \cdot p^m = (4p)^m, \end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Ungleichung die obere Schranke aus Teilaufgabe (b) verwendet haben.

(d) Sei $p < 1/4$. Wir bezeichnen mit ∂_{left} die Menge der $2n+1$ Knoten an der linken Seite von G_n und stellen fest, dass

$$\begin{aligned} &\{\exists \text{ einen offenen Pfad von der linken zur rechten Seite von } G_n\} \\ &\subseteq \bigcup_{x \in \partial_{\text{left}}} \{\exists \text{ einen offenen Pfad der Länge } 2n, \text{ der bei } x \text{ startet}\}. \end{aligned}$$

Aus der Monotonie (Satz 1.8) und dem Union Bound (Satz 1.9) folgt nun

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}_p\left[\exists \text{ einen offenen Pfad von der linken zur rechten Seite von } G_n\right] \\
&\overset{\text{[Monot.]}}{\leq} \mathrm{P}_p\left[\bigcup_{x\in\partial_{\text{left}}} \{\exists \text{ einen offenen Pfad der Länge } 2n, \text{ der bei } x \text{ startet}\}\right] \\
&\overset{\text{[U.-B.]}}{\leq} \sum_{x\in\partial_{\text{left}}} \underbrace{\mathrm{P}_p\left[\exists \text{ einen offenen Pfad der Länge } 2n, \text{ der bei } x \text{ startet}\right]}_{\overset{\text{[analog zu (c)]}}{\leq} (4p)^{2n}} \\
&\leq (2n+1)\cdot(4p)^{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}
$$

(e) Wie in Aufgabe 1.4 können wir den dualen Graphen $G_n^\star$ von G_n betrachten und darauf eine duale Perkolationskonfiguration $\omega^\star$ definieren, wobei eine Kante $e^\star$ genau dann offen ist, wenn die Kante e, die $e^\star$ schneidet, geschlossen ist. Somit gilt für jede Kante $e^\star$

$$\mathrm{P}_p[e^\star \text{ ist offen}] = \mathrm{P}_p[e \text{ ist geschlossen}] = 1-p.$$

Analog zu Aufgabe 1.4 kann man zeigen, dass ein offener Pfad in $\omega^\star$ von der oberen zur unteren Seite von $G_n^\star$ genau dann existiert, wenn kein offener Pfad in ω von der linken zur rechten Seite von G_n existiert. Es genügt also zu zeigen, dass

$$\mathrm{P}_p[\exists \text{ einen offenen Pfad in } \omega^\star \text{ von der oberen zur unteren Seite von } G_n^\star] \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{1}$$

Da $p > 3/4$, haben wir $\mathrm{P}_p[e^\star \text{ ist offen}]1-p < 1/4$. Wir können somit analog zu den Aufgabenteilen (b)-(d) zeigen, dass (1) gilt. Hieraus folgt

$$\mathrm{P}_p[\exists \text{ einen offenen Pfad von der linken zur rechten Seite von } G_n] \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$