

# Wahrscheinlichkeit & Statistik

## Serie 3

**Abgabe bis Mittwoch (16.03.2022) um 10:15 Uhr**

Diese Serie beschäftigt sich mit der Konstruktion und Transformation von Zufallsvariablen, mit den Eigenschaften einer Verteilungsfunktion und mit einer wichtigen Verallgemeinerung des Existenz Theorems von Kolmogorov. In der letzten Aufgabe wenden wir diese Verallgemeinerung an, um Perkolation auf dem unendlichen Graphen  $\mathbb{Z}^2$  zu definieren.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter  
<https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/>

---

### Aufgabe 3.1 [Konstruktion von Zufallsvariablen]

Ziel dieser Aufgabe ist es, Zufallsvariablen aus einer Folge unabhängiger Münzwürfe zu konstruieren. Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(X_i)_{i \geq 1}$  eine unendliche Folge von unabhängigen,  $\text{Ber}(1/2)$ -verteilten Zufallsvariablen. Wir betrachten den folgenden Algorithmus:

```
i = 1
While  $X_i = X_{i+1} = 1$  do
    i = i + 2
endwhile
Z =  $X_i + 2 \cdot X_{i+1}$ 
Return Z
```

- Zeige, dass der Algorithmus immer (mit Wahrscheinlichkeit 1) nach endlich vielen Schritten terminiert.
- Zeige, dass  $Z$  eine gleichverteilte Zufallsvariable in  $\{0, 1, 2\}$  ist.
- Gebe einen Algorithmus an, der eine  $\text{Ber}(1/5)$ -verteilte Zufallsvariable ausgibt.
- [*Bonus*] Gebe einen Algorithmus an, der eine  $\text{Ber}(1/\pi)$ -verteilte Zufallsvariable  $Z$  ausgibt.

### Aufgabe 3.2 [Transformation von Zufallsvariablen]

Ziel dieser Aufgabe ist es, Zufallsvariablen durch Transformation einer gleichverteilten Zufallsvariable zu konstruieren. Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $U$  eine gleichverteilte Zufallsvariable in  $[0, 1]$ , d.h.  $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$ .

- Konstruiere aus  $U$  eine  $\text{Ber}(1/3)$ -verteilte Zufallsvariable  $Z$ .
- Konstruiere aus  $U$  eine gleichverteilte Zufallsvariable  $U'$  in  $[-1, 2]$ . Was ist die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable  $(U')^2$ ?
- Konstruiere aus  $U$  eine  $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilte Zufallsvariable  $Y$ .  
*Hinweis: Eine Zufallsvariable heisst exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda > 0$  (kurz  $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt), falls folgende die Verteilungsfunktion hat:*

$$F(a) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda a}, & \text{für } a \geq 0, \\ 0, & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

**Aufgabe 3.3 [Verteilungsfunktion: Eigenschaften]**

Sei  $X$  eine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Ziel dieser Aufgabe ist es, Eigenschaften der Verteilungsfunktion  $F_X$  von  $X$  zu beweisen. Zur Erinnerung:  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  ist für  $a \in \mathbb{R}$  definiert durch

$$F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a].$$

- (a) Zeige, dass  $F_X$  monoton wachsend ist, d.h. für alle  $a \leq b$  gilt

$$F_X(a) \leq F_X(b).$$

- (b) Zeige, dass  $F_X$  rechtsseitig stetig ist, d.h. für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt

$$F_X(a+) := \lim_{h \downarrow 0} F_X(a+h) = F_X(a).$$

*Hinweis: Nutze die Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmasses aus Proposition 1.11: Für eine monoton fallende Folge von Ereignissen  $(A_n)_{n \geq 1}$  (d.h.  $A_n \supseteq A_{n+1}$  für alle  $n \geq 1$ ) gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right].$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft von  $F_X$  ist, dass

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} F_X(a) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{a \rightarrow \infty} F_X(a) = 1.$$

Dies folgt aus  $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$  und  $\mathbb{P}[\Omega] = 1$  zusammen mit der Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmasses.

**Aufgabe 3.4 [Existenz Theorem von Kolmogorov: Verallgemeinerung]**

Sei  $(F_i)_{i \geq 1}$  eine (unendliche) Folge monoton wachsender, rechtsstetiger Funktionen  $F_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  mit  $\lim_{a \rightarrow -\infty} F_i(a) = 0$  und  $\lim_{a \rightarrow \infty} F_i(a) = 1$ . Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  und eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen  $(X_i)_{i \geq 1}$  auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  existieren, sodass für die Verteilungsfunktionen gilt:

$$F_{X_i} = F_i, \quad \forall i \geq 1.$$

- (a) Zeige, dass ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mit unabhängigen, Bernoulli(1/2)-verteilten Zufallsvariablen  $(X_{i,j})_{i,j \geq 1}$  existiert.

*Hinweis: Nutze das Existenz Theorem von Kolmogorov.*

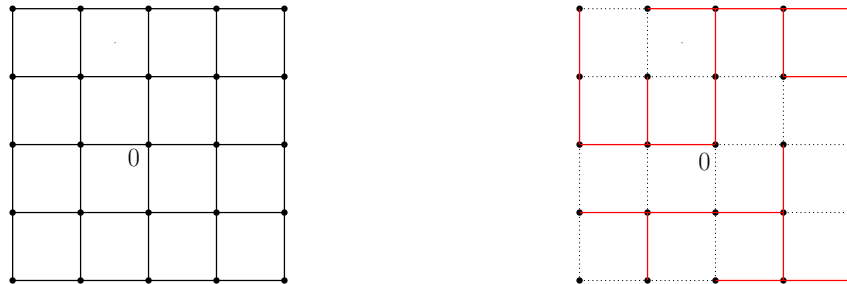
- (b) Konstruiere basierend auf (a) eine Folge unabhängiger,  $\mathcal{U}(0,1)$ -verteilter Zufallsvariablen  $(U_i)_{i \geq 1}$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

*Erinnerung: Wir schreiben  $\mathcal{U}(0,1)$  für die Gleichverteilung auf dem Intervall  $[0,1]$ .*

- (c) Zeige nun, dass eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen  $(X_i)_{i \geq 1}$  existiert, sodass für die Verteilungsfunktionen  $F_{X_i} = F_i$  für jedes  $i \geq 1$  gilt.

**Aufgabe 3.5 [Perkolation auf  $\mathbb{Z}^2$ : Phasenübergang und kritischer Parameter  $p_c$ ]**

In dieser Aufgabe betrachten wir Perkolation auf dem Quadratgitter  $\mathbb{Z}^2$ . Genauer gesagt ist dies der unendliche Graph  $G = (\mathbb{Z}^2, E)$ , bei dem nächste Nachbarn durch Kanten verbunden sind, d.h.  $e = \{u, v\} \in E$  für zwei Knoten  $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{Z}^2$ , falls  $|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2| = 1$ . Ein Ausschnitt des Quadratgitters ist in Abbildung 1a gezeigt.



(a) Darstellung eines Ausschnitts des Quadratgitters  $\mathbb{Z}^2$

(b) Perkolation auf einem Ausschnitt von  $\mathbb{Z}^2$ : offene Kanten in rot.

Abbildung 1

- (a) Sei  $p \in [0, 1]$ . Zeige, dass ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mit unabhängigen,  $\text{Ber}(p)$ -verteilten Zufallsvariablen  $(X_e)_{e \in E}$  existiert.

*Hinweis: Nutze das Resultat aus Aufgabe 3.4.*

Somit ist es uns gelungen, Perkolation auf einem unendlichen Graphen zu definieren, indem wir eine unendliche Folge von unabhängigen,  $\text{Ber}(p)$ -verteilten Zufallsvariablen  $(X_e)_{e \in E}$  betrachten. Wie bisher heisst eine Kante  $e$  offen, falls  $X_e = 1$ , und geschlossen, falls  $X_e = 0$ . Abbildung 1b zeigt ein Beispiel von Perkolation auf einem Ausschnitt des Quadratgitters  $\mathbb{Z}^2$ . Wir definieren nun

$$\theta(p) := \mathbb{P}[0 \leftrightarrow \infty] = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\exists \text{ einen offenen Pfad } \gamma \text{ der Länge } m, \text{ der bei } 0 \text{ startet}]$$

und erhalten in Abhängigkeit des Parameters  $p$  eine Funktion

$$\begin{aligned} \theta: [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ p &\mapsto \mathbb{P}[0 \leftrightarrow \infty] \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Funktion  $\theta$  monoton wachsend ist. Hierfür verwenden wir eine Technik, die Kopplung (engl. Coupling) genannt wird. Zuerst stellen wir fest, dass analog zu Aufgabenteil (a) ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mit unabhängigen,  $\mathcal{U}([0, 1])$ -verteilten Zufallsvariablen  $(U_e)_{e \in E}$  existiert. Auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum definieren wir für  $p \in [0, 1]$  und  $e \in E$  die Zufallsvariablen  $Y_e^{(p)}$  durch

$$Y_e^{(p)}: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq U_e(\omega) < 1 - p, \\ 1, & \text{falls } 1 - p \leq U_e(\omega) \leq 1. \end{cases}$$

- (b) Sei  $p \in [0, 1]$ . Zeige, dass die Zufallsvariablen  $(Y_e^{(p)})_{e \in E}$  unabhängig und  $\text{Ber}(p)$ -verteilt sind.

- (c) Zeige, dass die Funktion  $\theta$  monoton wachsend in  $p$  ist.

*Hinweis: Zeige zuerst, dass für  $0 \leq p \leq q \leq 1$  gilt:*

$$\mathbb{P} \left[ \bigcap_{e \in E} \{Y_e^{(p)} \leq Y_e^{(q)}\} \right] = 1.$$

Wir definieren nun den kritischen Parameter

$$p_c := \sup\{p \in [0, 1] : \theta(p) = 0\}.$$

Basierend auf dem Resultat aus Aufgabe 2.5 können wir bereits eine erste interessante Aussage über den Wert des kritischen Parameters treffen:

(d) Zeige, dass  $p_c \geq 1/4$ .

*Hinweis: Nutze das Resultat aus Aufgabe 2.5 (c).*

**Lösung 3.1**

- (a) Um zu zeigen, dass der Algorithmus nach endlich vielen Schritten terminiert, müssen wir zeigen, dass die While-Schleife nur endlich oft durchlaufen wird. Wir stellen fest, dass für  $j \geq 0$  gilt

$$\begin{aligned} A_j &:= \{\text{While-Schleife wird genau } j \text{ Mal durchlaufen}\} \\ &= \left( \bigcap_{i=1}^{2j} \{X_i = 1\} \right) \cap (\{X_{2j+1} = 0\} \cup \{X_{2j+2} = 0\}). \end{aligned}$$

Aus der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen  $(X_i)_{i \geq 1}$  folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_j] &= \mathbb{P} \left[ \bigcap_{i=1}^{2j} \{X_i = 1\} \cap (\{X_{2j+1} = 0\} \cup \{X_{2j+2} = 0\}) \right] \\ &= \left( \prod_{i=1}^{2j} \mathbb{P}[X_i = 1] \right) \cdot \underbrace{\mathbb{P}[\{X_{2j+1} = 0\} \cup \{X_{2j+2} = 0\}]}_{=1 - \mathbb{P}[\{X_{2j+1}=1\} \cap \{X_{2j+2}=1\}] = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{2j}. \end{aligned}$$

Wir summieren nun über alle Szenarien, in denen der Algorithmus terminiert, d.h. über die disjunkten Ereignisse  $(A_j)_{j \geq 1}$  und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\text{Algorithmus terminiert}] &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}[A_j] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{3}{4} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{2j} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^j = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 1. \end{aligned}$$

- (b) Aus Teilaufgabe (a) wissen wir, dass das Ereignis  $A := \{\text{Algorithmus terminiert}\} = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$  Wahrscheinlichkeit 1 hat und dass die Ereignisse  $(A_j)_{j \geq 1}$  disjunkt sind. Somit gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z = 0] &= \mathbb{P}[\{Z = 0\} \cap A] + \underbrace{\mathbb{P}[\{Z = 0\} \cap A^c]}_{\leq \mathbb{P}[A^c] = 0} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}[\{Z = 0\} \cap A_j] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P} \left[ \bigcap_{i=1}^{2j} \{X_i = 1\} \cap \{X_{2j+1} = 0\} \cap \{X_{2j+2} = 0\} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{2j+2} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^j = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

wobei wir wieder die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen  $(X_i)_{i \geq 1}$  verwendet haben sowie die Definition von  $Z$  im Algorithmus. Analog erhält man auch, dass

$$\mathbb{P}[Z = 1] = \mathbb{P}[Z = 2] = \frac{1}{3}$$

und somit ist die Zufallsvariable  $Z$  gleichverteilt in  $\{0, 1, 2\}$ .

(c) Wir betrachten den folgenden Algorithmus:

```

i = 1
While (Xi = Xi+2 = 1) or (Xi+1 = Xi+2 = 1) do
    i = i + 3
endwhile
Z = Xi + 2 · Xi+1 + 4 · Xi+2
If Z = 4
    Z' := 1
Else
    Z' := 0
Return Z'

```

Wie in Aufgabenteil (a) kann man zeigen, dass der Algorithmus mit Wahrscheinlichkeit 1 terminiert und analog zu Aufgabenteil (b) kann man sehen, dass die Zufallsvariable  $Z$  gleichverteilt ist in  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Somit folgt, dass  $Z'$  Ber(1/5)-verteilt ist.

(d) Zur Konstruktion einer Ber(1/π)-verteilten Zufallsvariable verwenden wir die Idee aus der Vorlesung, dass man mithilfe von Ber(1/2)-verteilten Zufallsvariablen eine zufällige Zahl im Intervall  $[0, 1]$  konstruieren kann. Anders als in der Vorlesung, wo wir zur Konstruktion einer gleichverteilten Zufallsvariable unendlich viele Münzwürfe benötigt haben, werden wir sehen, dass hier endlich viele Münzwürfe ausreichen.

**Schritt 1:** Wir schreiben

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i},$$

d.h.  $0.y_1y_2y_3\dots$  ist die Darstellung der Zahl  $1/\pi$  im Binärsystem. Um zu wissen, ob eine Zahl  $x \in [0, 1]$  grösser oder kleiner als  $1/\pi$  ist, genügt es, die Binärdarstellung von  $x$  bis zu der Stelle zu kennen, wo diese zum ersten Mal von der Binärdarstellung von  $1/\pi$  abweicht.

**Schritt 2:** Wir betrachten die Folge  $(X_i)_{i \geq 1}$  nun als die Nachkommastellen einer zufälligen Zahl  $X$  im Binärsystem und wollen herausfinden, ob  $X \leq 1/\pi$  oder  $X > 1/\pi$  gilt. Hierzu betrachten wir den folgenden Algorithmus:

```

i = 1
While Xi = yi do
    i = i + 1
endwhile
Z = 1 - Xi
Return Z

```

Der Algorithmus vergleicht mithilfe der While-Schleife die Binärdarstellung der zufälligen Zahl  $X$  mit der Binärdarstellung von  $1/\pi$ . Sobald diese zum ersten Mal voneinander abweichen, also  $X_i \neq y_i$ , folgt  $X < 1/\pi$ , falls  $X_i = 0 < 1 = y_i$ , oder  $X > 1/\pi$ , falls  $X_i = 1 > 0 = y_i$ . Für  $X \in [0, 1/\pi)$ , setzen  $Z = 1$ , andernfalls  $Z = 0$ . Da  $X$  gleichverteilt in  $[0, 1]$  ist, folgt, dass  $Z$  Ber(1/π)-verteilt ist. Abschliessend bemerken wir, dass sich analog zu Aufgabenteil (a) zeigen lässt, dass der Algorithmus mit Wahrscheinlichkeit 1 terminiert.

### Lösung 3.2

**Idee:** Wir wollen Theorem 2.12 anwenden. Hierzu müssen wir lediglich die verallgemeinerte Inverse der jeweiligen Verteilungsfunktion bestimmen.

(a) Die Verteilungsfunktion einer  $\text{Ber}(1/3)$ -verteilten Zufallsvariable ist

$$F(a) = \begin{cases} 0, & \text{für } a < 0, \\ 2/3, & \text{für } 0 \leq a < 1, \\ 1, & \text{für } a \geq 1. \end{cases}$$

Die verallgemeinerte Inverse  $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  ist also gegeben durch

$$F^{-1}(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 < \alpha \leq 2/3, \\ 1, & \text{für } 2/3 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Aus Theorem 2.12 folgt, dass  $Z := F^{-1}(U)$   $\text{Ber}(1/3)$ -verteilt ist.

(b) Die Verteilungsfunktion einer  $\mathcal{U}([-1, 2])$ -verteilten Zufallsvariable ist

$$F(a) = \begin{cases} 0, & \text{für } a < -1, \\ \frac{a+1}{3}, & \text{für } -1 \leq a \leq 2, \\ 1, & \text{für } a \geq 2. \end{cases}$$

Die verallgemeinerte Inverse  $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  ist also gegeben durch

$$F^{-1}(\alpha) = 3\alpha - 1$$

Aus Theorem 2.12 folgt, dass  $U' := F^{-1}(U)$   $\mathcal{U}([-1, 2])$ -verteilt ist. Um die Verteilungsfunktion von  $(U')^2$  zu bestimmen, stellen wir zunächst fest, dass

$$F_{(U')^2}(a) = \mathbb{P}[(U')^2 \leq a] = \begin{cases} 0, & \text{für } a < 0, \\ \mathbb{P}[-\sqrt{a} \leq U' \leq \sqrt{a}] = \mathbb{P}[U' \leq \sqrt{a}] - \mathbb{P}[U' < -\sqrt{a}], & \text{für } a \geq 0. \end{cases}$$

Es gilt

$$\mathbb{P}[U' \leq \sqrt{a}] = \begin{cases} \frac{\sqrt{a}+1}{3}, & \text{für } 0 \leq a \leq 4, \\ 1, & \text{für } a > 4, \end{cases}$$

und

$$\mathbb{P}[U' \leq -\sqrt{a}] = \begin{cases} \frac{-\sqrt{a}+1}{3}, & \text{für } 0 \leq a \leq 1, \\ 0, & \text{für } a > 1. \end{cases}$$

Somit erhalten wir

$$F_{(U')^2}(a) = \mathbb{P}[(U')^2 \leq a] = \begin{cases} 0, & \text{für } a < 0, \\ \frac{2\sqrt{a}}{3}, & \text{für } 0 \leq a \leq 1, \\ \frac{\sqrt{a}+1}{3}, & \text{für } 1 < a \leq 4, \\ 1, & \text{für } a > 4. \end{cases}$$

(c) Die Verteilungsfunktion einer  $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilten Zufallsvariable ist

$$F(a) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda a}, & \text{für } a \geq 0, \\ 0, & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

Die verallgemeinerte Inverse  $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  ist also gegeben durch

$$F^{-1}(\alpha) = -\frac{\log(1 - \alpha)}{\lambda}.$$

Aus Theorem 2.12 folgt, dass  $Y := F^{-1}(U)$   $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt ist.

**Lösung 3.3**

- (a) Für  $a \leq b$  gilt  $\{X \leq a\} \subset \{X \leq b\}$ . Somit folgt aus der Monotonizität des Wahrscheinlichkeitsmasses, dass  $\mathbb{P}[X \leq a] \leq \mathbb{P}[X \leq b]$ , d.h.

$$F_X(a) \leq F_X(b). \quad (1)$$

- (b) Sei  $a \in \mathbb{R}$ , sei  $h_n \downarrow 0$ . Es gilt

$$\{X \leq a\} = \bigcap_{n \geq 1} \{X \leq a + h_n\}, \quad (2)$$

wobei  $\{X \leq a + h_n\} \supset \{X \leq a + h_{n+1}\}$ . Somit folgt aus der Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmasses, dass

$$\begin{aligned} F_X(a) &= \mathbb{P}[X \leq a] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n \geq 1} \{X \leq a + h_n\}\right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X \leq a + h_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} F_X[a + h_n] = \lim_{h \downarrow 0} F_X(a + h). \end{aligned}$$

**Lösung 3.4** In dieser Aufgabe beweisen wir Theorem 2.14.

- (a) Aus Theorem 2.8 wissen wir, dass ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mit unabhängigen, Bernoulli(1/2)-verteilten Zufallsvariablen  $(Y_k)_{k \geq 1}$  existiert. Es genügt nun eine injektive Abbildung  $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  zu wählen (z.B. diagonale Abzählung von  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  (vgl. Cantor's Diagonalargument) oder  $\phi(i, j) := 2^i \cdot 3^j$ ) und die Zufallsvariablen

$$X_{i,j} := Y_{\phi(i,j)}$$

zu definieren. Dass die Zufallsvariablen  $(X_{i,j})_{i,j \geq 1}$  Bernoulli(1/2)-verteilt sind, folgt direkt aus der Definition. Die Unabhängigkeit kann man leicht mittels Definition 2.5 prüfen, wobei man verwendet, dass  $\phi$  injektiv ist.

- (b) Für  $i \geq 1$  definieren wir die Zufallsvariablen

$$U_i := \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} X_{i,j}.$$

Gemäss Proposition 2.10 ist  $U_i$  gleichverteilt in  $[0, 1]$  (für jedes  $i \geq 1$ ). Die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen  $(U_i)_{i \geq 1}$  folgt aus der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen  $(X_{i,j})_{i,j \geq 1}$ .

- (c) Wir bezeichnen mit  $(F_i^{-1})_{i \geq 1}$  die verallgemeinerten Inversen der Funktionen  $(F_i)_{i \geq 1}$  und definieren für jedes  $i \geq 1$ ,

$$X_i = F_i^{-1}(U_i).$$

Aus Theorem 2.12 folgt, dass die Zufallsvariablen  $(X_i)_{i \geq 1}$  die gewünschten Verteilungsfunktionen haben. Die Unabhängigkeit folgt aus der Unabhängigkeit der  $(U_i)_{i \geq 1}$ .

**Lösung 3.5**

- (a) Gemäss Theorem 2.14 (siehe Aufgabe 3.4) wissen wir, dass ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  und eine Folge unabhängiger, Ber( $p$ )-verteilter Zufallsvariablen  $(\tilde{X}_i)_{i \geq 1}$  auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  existieren. Wir wählen nun eine injektive Abbildung  $\phi : E \rightarrow \mathbb{N}$  (also eine Nummerierung der Kanten) und definieren

$$X_e := \tilde{X}_{\phi(e)}.$$

Somit haben wir eine Familie  $(X_e)_{e \in E}$  von unabhängigen, Ber( $p$ )-verteilten Zufallsvariablen erhalten.



(b) Sei  $e \in E$ . Es gilt

$$\mathbb{P}[Y_e^{(p)} = 0] = \mathbb{P}[0 \leq U_e < 1 - p] = 1 - p$$

und

$$\mathbb{P}[Y_e^{(p)} = 1] = \mathbb{P}[1 - p \leq U_e \leq 1] = 1 - (1 - p) = p.$$

Somit ist  $Y_e^{(p)}$  Ber( $p$ )-verteilt ist.

Um zu zeigen, dass die Zufallsvariablen  $(Y_e^{(p)})_{e \in E}$  unabhängig sind, überprüfen wir die Definition (siehe Def. 2.5 und Def. 2.6). Wir definieren die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  durch

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0, \\ 1 - p, & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

Sei  $n \geq 1$  und seien  $e_1, \dots, e_n \in E$  beliebige Kanten. Nun gilt für beliebige  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y_{e_1}^{(p)} \leq x_1, \dots, Y_{e_n}^{(p)} \leq x_n] &= \mathbb{P}[U_{e_1} \leq f(x_1), \dots, U_{e_n} \leq f(x_n)] \\ &= \mathbb{P}[U_{e_1} \leq f(x_1)] \cdot \dots \cdot \mathbb{P}[U_{e_n} \leq f(x_n)] = \mathbb{P}[Y_{e_1}^{(p)} \leq x_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{P}[Y_{e_n}^{(p)} \leq x_n], \end{aligned}$$

wobei wir die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen  $U_{e_1}, \dots, U_{e_n}$  verwendet haben. Somit haben wir die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen  $Y_{e_1}^{(p)}, \dots, Y_{e_n}^{(p)}$  gezeigt (siehe Def. 2.5). Da  $n \geq 1$  und die Kanten  $e_1, \dots, e_n$  beliebig waren, folgt die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen  $(Y_e^{(p)})_{e \in E}$  (siehe Def. 2.6).

(c) Wir fixieren zunächst eine beliebige Kante  $e \in E$ . Aufgrund der Definition von  $Y_e^{(p)}$  und  $Y_e^{(q)}$  haben wir

$$\begin{aligned} A_{0,0} &:= \{Y_e^{(p)} = Y_e^{(q)} = 0\} = \{0 \leq U_e < 1 - q\} \\ A_{0,1} &:= \{Y_e^{(p)} = 0, Y_e^{(q)} = 1\} = \{1 - q \leq U_e < 1 - p\} \\ A_{1,1} &:= \{Y_e^{(p)} = Y_e^{(q)} = 1\} = \{1 - p \leq U_e \leq 1\} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y_e^{(p)} \leq Y_e^{(q)}] &= \mathbb{P}[A_{0,0} \cup A_{0,1} \cup A_{1,1}] \\ &= \mathbb{P}[\{0 \leq U_e < 1 - q\} \cup \{1 - q \leq U_e < 1 - p\} \cup \{1 - p \leq U_e \leq 1\}] \\ &= \mathbb{P}[0 \leq U_e \leq 1] = 1 \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Resultats aus Aufgabe 2.1 folgt nun

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{e \in E} \{Y_e^{(p)} \leq Y_e^{(q)}\}\right] = 1. \quad (3)$$

Da die Zufallsvariablen  $(Y_e^{(p)})_{e \in E}$  unabhängig und Ber( $p$ )-verteilt sind, gilt

$$\theta(p) = \mathbb{P}[0 \leftarrow \xrightarrow{(Y_e^{(p)})_{e \in E}} \infty],$$

wobei wir  $(Y_e^{(p)})_{e \in E}$  über den  $\leftrightarrow$ -Pfeil schreiben, um zu verdeutlichen, dass wir das Ereignis für den Teilgraphen betrachten, indem eine Kante  $e \in E$  genau dann offen ist, wenn  $Y_e^{(p)} = 1$

gilt. Nun folgt

$$\begin{aligned}
 \theta(p) &= \mathbb{P}[0 \xleftrightarrow{(Y_e^{(p)})_{e \in E}} \infty] \\
 &\stackrel{(3)}{=} \mathbb{P}\left[ \underbrace{\left\{ 0 \xleftrightarrow{(Y_e^{(p)})_{e \in E}} \infty \right\} \cap \bigcap_{e \in E} \left\{ Y_e^{(p)} \leq Y_e^{(q)} \right\}}_{\subset \left\{ 0 \xleftrightarrow{(Y_e^{(q)})_{e \in E}} \infty \right\}} \right] \\
 &\stackrel{[\text{Monotonizität}]}{\leq} \mathbb{P}[0 \xleftrightarrow{(Y_e^{(q)})_{e \in E}} \infty] = \theta(q).
 \end{aligned}$$

Die Funktion  $\theta$  ist also monoton wachsend.

(d) Aus Aufgabe 2.5 (c) wissen wir, dass für Perkolation mit Parameter  $p$  gilt

$$\mathbb{P}_p[\exists \text{ einen offenen Pfad } \gamma \text{ der Länge } m, \text{ der bei } 0 \text{ startet}] \leq (4p)^m.$$

Somit folgt für  $p < 1/4$ , dass

$$\theta(p) = \mathbb{P}[0 \leftrightarrow \infty] \leq \lim_{m \rightarrow \infty} (4p)^m = 0$$

und somit gilt  $p_c \geq 1/4$ .